

მასალათა მექანიკა

მიკროპოლარული ღეროს წონასწორობის განტოლებები

ზურაბ არქანია

ნოდარ მარდალეიშვილი

nodar.mardaleishvili@atsu.edu.ge

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ქუთაისი, საქართველო

DOI: <https://doi.org/10.52340/atsu.2024.2.24.16>

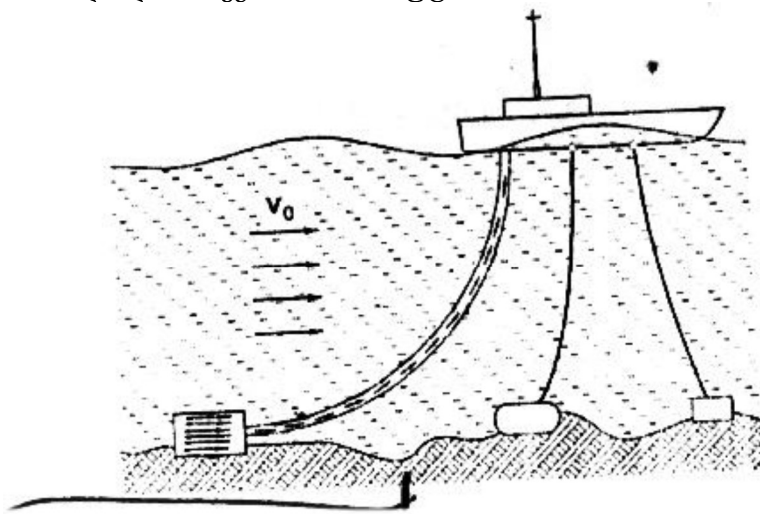
გამოყვანილია მიკროპოლარული ღეროს წონასწორობის ვექტორული განტოლებები. მიღებული განტოლებების ამოხსნის შედეგები საშუალებას მოგვცემს განისაზღვროს მიკროპოლარულ ღეროში აღძრული შიგა ძალები და შემდეგ შეფასდეს ღეროს სიმტკიცე; შესაბამისი ამოცანების ამოხსნის შემდეგ შესაძლებელია დადგინდეს მიკროპოლარულობის გავლენა ღეროს ფორმაზე და სიმტკიცეზე.

საკვანძო სიტყვები: მიკროპოლარული ღერო, შიგა ძალვა, მომენტური ძაბვა, წონასწორობის განტოლება.

ღეროებს ფართო გამოყენება აქვს ტექნიკის სხვადასხვა დარგში, განსაკუთრებით სამშენებლო კონსტრუქციებში, სხვადასხვა სახის მანქანა-დანადგარებში და ხელსაწყოებში. ტექნიკის განვითარებამ მოითხოვა ღეროების მექანიკის ახალი ამოცანების დამუშავება.

ღეროების, მილსადენების, შლანგების გაანგარიშებისას, რომელთა სიგრძე მნიშვნელოვნად აღემატება განიკვეთის დიამეტრს, შეიძლება უგულებელვყოთ სიხისტე ღუნვაზე და გრეხაზე და ვისარგებლოთ აბსოლუტურად მოქნილი ღეროების მოდელით, რადან ამ დაშვებით ცდომილობა არ აღემატება (5-7) % (Светлицкий 1982: 7-11). აბსოლუტურად მოქნილი ღეროების (მილსადენების) მექანიკაში ინტენსიურად მუშაობდნენ პროფ. ვ.ა. სვეტლიცკი და მისი მოწაფეები (Светлицкий 1972, Светлицкий 2001, Светлицкий 1982, Сагинадзе 1983, Бадзгарაძე 1984, Сулаберидзе 1983, Арканиа 2008, Арканиа 2019) და ა.შ.

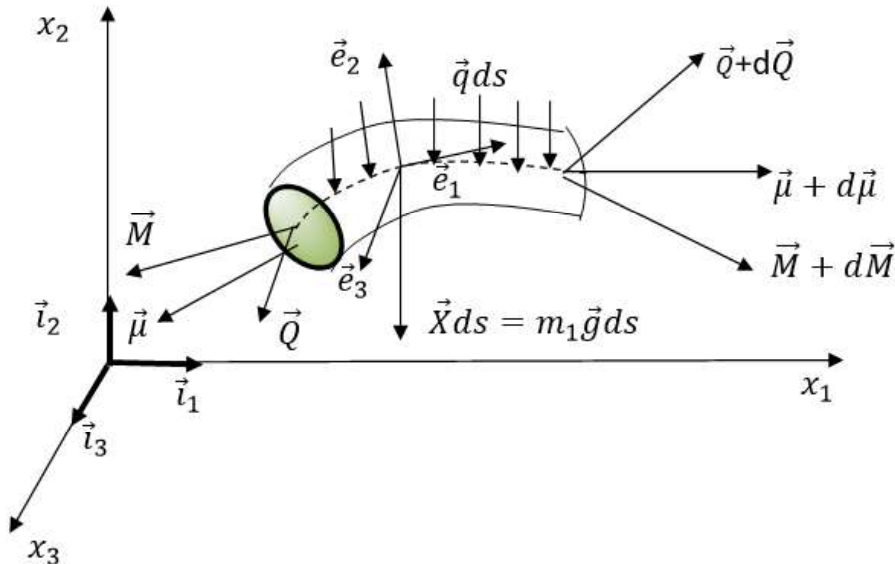
მათ შეისწავლეს აბსოლუტურად მოქნილ ღეროების (შლანგების) სტატიკისა და დინამიკის მრავალი პრობლემა, მიუხედავად ამისა მილსადენების (შლანგების) მექანიკის ბევრი პრობლემა ჯერ კიდევ სრულყოფილად არ არის შესწავლილი, მაგალითად ამოცანები, რომლებიც დაკავშირებულია ნავსადგურების შემოსასვლელი არხების გაწმენდისა და გაღრმავების საკითხებთან. ამ ამოცანების წარმატებით გადაწყვეტა, მაგალითად, ფოთის ნავსადგურს ყოველწლიურად ასეული ათასობით დოლარის ეკონომიას მოუტანს.



ნახ. 1. შემოსასვლელი არხის გაწმენდის პროცესი- გრუნტის ამოღება ზღვის ფსკერიდან (Светлицкий 2001: 43).

წინამდებარე ნაშრომში შემოთავაზებულია მიკროპოლარული ღეროს წონასწორობის განტოლებები. დეფორმირებადი სხეულების მიკროპოლარული თეორიის ელემენტები გადმოცემულია ძმები კოსერების შესანიშნავ მონოგრაფიაში (Cosserat E., Cosserat F. 1898). დეფორმირებადი სხეულების მიკროპოლარული თეორიის განვითარებაში მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანა მრავალმა მეცნიერმა (Новацкий 1980, Купрадзе... 1976, Eringen 1999, Никабадзе 2023...).

განვიხილოთ ds სიგრძის მიკროპოლარული ღეროს ელემენტი. ამ ელემენტზე ზოგად შემთხვევაში მოქმედებს ძალები (ნახ.2):



ნახ. 2. მიკროპოლარული ღეროს ელემენტი.

\vec{q} – განაწილებული დატვირთვის ვექტორი, $\vec{P}^{(i)}$ – შეყურსული ძალები, \vec{Q} – შიგა ძალები ვექტორი, რომელიც ასე ჩაიწერება:

$$\vec{Q} = Q_1 \vec{e}_1 + Q_2 \vec{e}_2 + Q_3 \vec{e}_3,$$

\vec{M} – შიგა ძალების მომენტი, რომელსაც აქვს სახე

$$\vec{M} = M_1 \vec{e}_1 + M_2 \vec{e}_2 + M_3 \vec{e}_3,$$

$\vec{X} = m_1 \vec{g}$ – მოცულობითი ძალა, $\vec{\mu}$ – მოცულობითი მომენტი:

$$\vec{\mu} = \mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + \mu_3 \vec{e}_3.$$

რადგან ღეროს ელემენტი წონასწორობაშია, ამიტომ გვაქვს წონასწორობის ორი ვექტორული განტოლება:

$$d\vec{Q} + \vec{q} ds + m_1 \vec{g} ds + \sum_{i=1}^3 \vec{P}^{(i)} \delta(s - s_i) ds = 0,$$

$$d\vec{M} + ds \vec{e}_1 \times \vec{Q} + ds \vec{e}_1 \times m_1 \vec{g} + ds \vec{e}_1 \times \sum_{i=1}^3 \vec{P}^{(i)} \delta(s - s_i) + d\vec{\mu} = 0,$$

საიდანაც

$$\frac{d\vec{Q}}{ds} + \vec{q} + m_1 \vec{g} + \sum_{i=1}^3 \vec{P}^{(i)} \delta(s - s_i) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{e}_1 \times \vec{Q} + \vec{e}_1 \times \sum_{i=1}^3 \vec{P}^{(i)} \delta(s - s_i) = 0. \quad (2)$$

აქ $\delta(s - s_i)$ დირაკის ფუნქციაა.

ჩავთვალოთ, რომ M_1, M_2, M_3 და μ_1, μ_2, μ_3 მომენტები ღეროს ღერძული წირის სიმრუდის და გრეხის ცვლილების პროპორციულია, მაშინ მივიღებთ ექვს განტოლებას:

ზ. არქანია, ნ. მარდალეიშვილი

$$M_1 = A_{11}(\kappa_1 - \kappa_{10}), M_2 = A_{22}(\kappa_2 - \kappa_{20}), M_3 = A_{33}(\kappa_3 - \kappa_{30}); \quad (3)$$

$$\mu_1 = B_{11}(\kappa_1 - \kappa_{10}), \mu_2 = B_{22}(\kappa_2 - \kappa_{20}), \mu_3 = B_{33}(\kappa_3 - \kappa_{30}), \quad (4)$$

სადაც κ_{10} – ღეროს ღერძული წირის გრეხა, ხოლო κ_{20} და κ_{30} – მისი სიმრუდეებია ღეროს არადეფორმირებულ მდგომარეობაში; A_{ii}, B_{jj} ($i, j = 1, 2, 3$) – ღეროს სიხისტეებია ღუნვისას და გრეხისას, რომლებიც შეგვიძლია ასე ჩავწერთ:

$$A_{11} = GJ_k; \quad A_{22} = EJ_{x_{30}}; \quad A_{33} = EJ_{x_{20}}; \quad (5)$$

$$B_{11} = \alpha J_k; \quad B_{22} = \nu J_{x_{30}}; \quad B_{33} = \beta J_{x_{20}}; \quad (6)$$

სადაც G, E, α, β, ν – მასალის დრეკადი მუდმივებია.

შევნიშნოთ, რომ (3) და (4) თანაფარდობები ჩაწერილია ინერციის მთავარ ღერძებში. (1) და (2) განტოლებები შეგვიძლია ჩავწეროთ ორი ვექტორული განტოლების სახით $\{\vec{e}_i\}$ ბაზისში:

$$\vec{M} = A(\vec{\kappa} - \vec{\kappa}_0^{(1)}), \quad \vec{\mu} = B(\vec{\kappa} - \vec{\kappa}_0^{(1)}), \quad (7)$$

სადაც

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix}$$

$\vec{\kappa}_0$ ვექტორი მოცემულია $\{\vec{e}_{i0}\}$ ბაზისში:

$$\vec{\kappa}_0 = \kappa_{10}\vec{e}_{10} + \kappa_{20}\vec{e}_{20} + \kappa_{30}\vec{e}_{30}.$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ κ_j სიმრუდის ნაზრდის მნიშვნელობები, უნდა ჩავთვალოთ, რომ $\vec{\kappa}_0^{(1)}$ ვექტორი ღეროს დეფორმაციისას რჩება უცვლელი $\{\vec{e}_i\}$ ბაზისში. ამ შემთხვევაში:

$$\vec{\kappa}_0^{(1)} = \kappa_{10}\vec{e}_1 + \kappa_{20}\vec{e}_2 + \kappa_{30}\vec{e}_3.$$

ჩავწეროთ განტოლებები, რომლებიც κ_j -ს დააკავშირებს $\{\vec{e}_i\}$ ღერძების მობრუნების კუთხეებთან. სამწახნაგას ღერძების გადაადგილებისას ღერძები მობრუნდება პირვანდელი მდებარეობის მიმართ $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ კუთხეებით და მათი მდებარეობა გამოისახება ამ კუთხეების საშუალებით. ამის გამო $\vec{\kappa}$ ვექტორიც, რომელიც ახასიათებს ღერძების მდებარეობის ცვლილებას, გამოისახება ამ კუთხეების საშუალებით. ვისარგებლოთ თანაფარდობებით:

$$\vec{e}_i = \ell_{ij}\vec{e}_{j0}, \quad \vec{e}_{j0} = \ell_{kj}\vec{e}_k.$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{e}_i}{ds} = \epsilon_{kji}\kappa_j\vec{e}_k$$

სადაც ϵ_{ijk} ლევი-ჩივიტას სიმბოლოა: $\epsilon_{ijk}=+1$, თუ ყველა ინდექსი განსხვავებულია და ქმნის ლუწ გადანაცვლებას, $\epsilon_{ijk}=-1$, თუ ყველა ინდექსი განსხვავებულია და ქმნის კენტ გადანაცვლებას, $\epsilon_{ijk}=0$, თუ ორი მაინც ინდექსი ტოლია.

κ_j სიდიდეები $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ კუთხეების საშუალებით გამოისახება შემდეგი ვექტორული ფორმულის საშუალებით (ეს ფორმულები დაწვრილებით გამოყვანილია ნაშრომში (Светлицкий 2001: 43):

$$\vec{\kappa} = L_1 \frac{d\vartheta}{ds} + L\vec{\kappa}_0^{(1)}, \quad (\vec{\kappa}_0^{(1)} = \kappa_{j0}\vec{e}_j), \quad (8)$$

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 & 0 & -\sin\vartheta_2 \\ -\sin\vartheta_3 & 1 & 0 \\ \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 & 0 & \cos\vartheta_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vartheta}{ds} = \begin{pmatrix} \vartheta'_1 \\ \vartheta'_2 \\ \vartheta'_3 \end{pmatrix}$$

$\frac{d\vartheta}{ds}$ – ლოკალური წარმოებულია.

გამოვიყვანოთ ღერძული წირის წერტილის გადაადგილების ვექტორის განტოლებები. როგორც ცნობილია, დრეკადობის წრფივ მიკროკოლარულ თეორიაში მიკრონაწილაკის მოცულობა არ იცვლება, იგი ბრუნავს მოცულობის ცვლილების გარშე (Эринген 1978: 646-650). ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0 \quad \left(\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i \equiv u_i \vec{e}_i \right)$$

ამ ტოლობის გაწარმოებით ვღებულობთ:

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} - \frac{d\vec{r}_0}{ds} = \vec{e}_i - \vec{e}_{i0}, \quad (9)$$

\vec{e}_{i0} -ბაზისის ერთეულოვანი ვექტორებია ღეროს არადეფორმირებულ მდგომარეობაში.

ვთვლით, რომ ღეროს არადეფორმირებული მდგომარეობა ცნობილია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ცნობილია $\vec{\kappa}_0$ ვექტორი, მიმართულების კოსინუსები და L^0 მატრიცა, რომელიც აკავშირებს $\{\vec{e}_{i0}\}$ ბაზისს $\{\vec{l}_j\}$ ბაზისთან:

$$\vec{e}_{i0} = \ell_{ij}^0 \vec{l}_j,$$

სადაც ℓ_{ij}^0 წარმოადგენს L^0 მატრიცის ელემენტებს, რომელსაც აქვს სახე:

$$L^0 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_2^0 & \cos\vartheta_2^0 \sin\vartheta_3^0 \cos\vartheta_1^0 + \cos\vartheta_2^0 \sin\vartheta_3^0 \sin\vartheta_1^0 - \\ & + \sin\vartheta_2^0 \sin\vartheta_1^0 & -\sin\vartheta_2^0 \cos\vartheta_1^0 \\ -\sin\vartheta_3^0 & \cos\vartheta_1^0 \cos\vartheta_3^0 & \cos\vartheta_3^0 \sin\vartheta_1^0 \\ \sin\vartheta_2^0 \cos\vartheta_3^0 & \sin\vartheta_2^0 \sin\vartheta_3^0 \cos\vartheta_1^0 - \sin\vartheta_2^0 \sin\vartheta_3^0 \sin\vartheta_1^0 + \\ & -\cos\vartheta_2^0 \sin\vartheta_1^0 & +\cos\vartheta_2^0 \cos\vartheta_1^0 \end{pmatrix},$$

ხოლო \vec{e}_i ერთეულოვანი ვექტორები \vec{e}_{i0} ვექტორებთან დაკავშირებულია თანაფარდობებით:

$$\vec{e}_i = \ell_{ij} \vec{e}_{j0} \quad (\vec{e}_{j0} = \ell_{ij} \vec{e}_i),$$

სადაც ℓ_{ij} არის L მატრიცის ელემენტები:

$$L = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 & \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_1 \\ -\sin\vartheta_3 & \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_3 & \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_1 \\ \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 & \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_1 & \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_1 \end{pmatrix}$$

მიღებული განტოლება საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ღერძული წირის წერტილების გადაადგილებები.

კლასიკური ღეროების შემთხვევაში ეს ამოცანები გადაწყვეტილია ნაშრომებში: არქანია... 2021, არქანია... 2022. მიკროპოლარული თეორიის გათვალისწინებით, შესაბამისი ამოცანების ამოხსნის შემდეგ შესაძლებელია დადგინდეს მიკროპოლარულობის გავლენა ღეროს ფორმაზე, ღერძულ ძალებზე და სიმტკიცეზე.

ლიტერატურა

- არქანია, ზურაბი. ნოდარ, მარდალეიშვილი. 2022. „სითხის შიგა და გარე ნაკადებთან ურთიერთმოქმედი აბსოლუტურად მოქნილი მილსადენის გაანგარიშების ალგორითმი“ *აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მოამბე*, №1(19), 2022: 119-131.
- არქანია, ზურაბი. ნოდარ, მარდალეიშვილი. 2021. „ჰაერის ან სითხის ნაკადში მოთავსებული აბსოლუტურად მოქნილი მილსადენების სიმტკიცის შეფასება“, *აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მოამბე*, №1(17), 2021: 144-150.
- Arkania, Z.M. A.G., Badzgaradze. 2008. „About the method of calculation of hoses loaded concentrated forces“ //Int. J. *Problems Of Mechanic*, №2(31), 2008: 72-76.
- Eringen, A.C. 1999. *Microcontinuum Field Theories, 1. Foundation and solids-Verlag*. N.Y.
- Cosserat, E. Cosserat, F. 1898. *Sur les equations de la teorie de lelastisite C. R. Acad. Sci.*, Paris (in French).

- Аркиания, З. М. 1987. „Статика шлангов, заполненных потоком вязкой жидкости и нагруженных сосредоточенными силами". Изв. Вуз. *Машиностроение*, №4, 1987: 11-15.
- Аркиания, З. И., Сагинадзе. 2003. „Об оценке прочности шлангов". *Проблемы прикладной механики*. №1 (10), 2003: 100-103.
- Аркиания, З. Н., Мардалишвили. 2019. „Расчет абсолютно гибких стержней, нагруженных сосредоточенными силами в потоке воздуха или жидкости". *Вестник московского университета. математика, механика*, серия 1, №4, 2019: 58-62.
- Бадзгарадзе, А. 1985: „Колебания абсолютно гибкого стержня в потоке жидкости вызванные силами Кармана", изв. ВУЗ. *Машиностроение*, №5, 1985: 73-77.
- Купрадзе, В. Д., Гегелия. Т.Г., Башалеишвили. М.О. Бурчуладзе, Т. В. 1976. *Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости*. М. «Наука».
- Новацкий, В. 1980. *Теория упругости*, М: «Мир».
- Никабадзе, М. 2023, *Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел*. М.: изд.-во московского ун-та.
- Светлицкий, В. 2001. *Механика абсолютно гибких стержней*, М.: Изд-во МАИ.
- Светлицкий, В. З., Мирошник. В., Кудрин. 1972. „Определение формы стационарного движения нити в средах различной вязкости". *Прикладная Механика*, т. 8, вып. 4, АН СССР, 1972: 100-104.
- Светлицкий, В. 1978. *Механика гибких стержней и нитей*. М.: Машиностроение.
- Светлицкий, В. 1982. *Механика трубопроводов и шлангов*. М.: Машиностроение.
- Светлицкий, В. 1987. *Механика стержней*, часть 1-Статика. *Механика стержней*, часть 2-Динамика. М.:»Высшая школа».

Mechanics of Materials

The equilibrium equations for the micropolar rod

Zurab Arkania

Nodar Mardaleishvili

nodar.mardaleishvili@atsu.edu.ge

Akaki Tsereteli State University

Kutaisi, Georgia

DOI: <https://doi.org/10.52340/atsu.2024.2.24.16>

The vector equilibrium equations for the micropolar rod have been derived. The results of solving the obtained equations will enable us to determine the internal forces generated in the micropolar rod and then assess the rod strength. After solving the relevant problems, it is possible to determine the influence of micropolarity on the shape and strength of the rod.

Keywords: micropolar rod; internal force; couple stress; equilibrium equation.

Rods have found wide application in various fields of technology, especially in building structures, and various types of machinery and equipment. The evolution of technology required the development of new tasks in the mechanics of rods.

When designing the rods, pipelines, and hoses, the length of which is significantly greater than the diameter of the cross-section, the flexural stiffness and torsional stiffness can be neglected. We can use the model of completely flexible rods since, with this assumption, the error does not exceed (5-7) % (Svetlitsky 1982). Prof. V.A. Svetlitsky and his students worked intensively in the mechanics of completely flexible rods (pipelines) (Svetlitsky 1972, Svetlitsky 2001, Svetlitsky 1982, Saginadze 1983, Badzgaradze 1984, Sulaberidze 1983, Arkania 2008, Arkania 2019). They studied many problems of the statics and dynamics of absolutely flexible rods (hose), but despite this, many problems of the mechanics of pipelines (hoses) have not yet been fully explored, for example, problems related to the cleaning and dredging of harbor entrance channels. A successful solution to these problems will generate thousands of dollars in savings, for example, for the port of Poti.

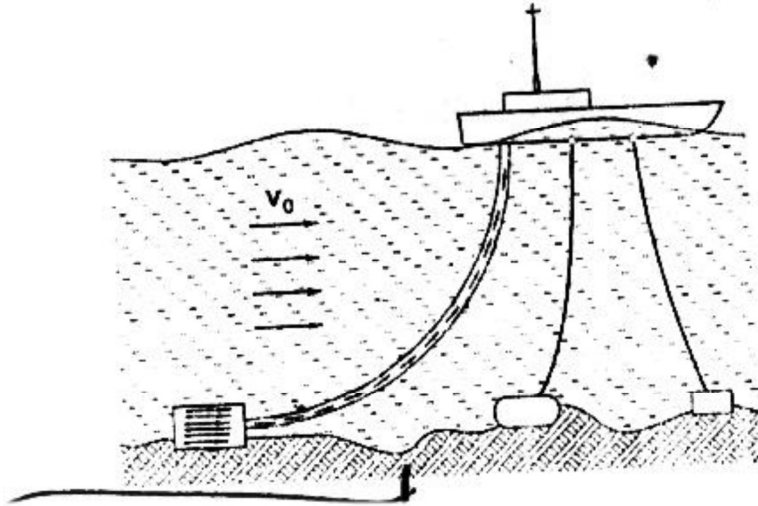


Fig. 1. Inlet channel cleaning process- Removing soil from the seabed (Svetlitsky 2001: 43).

In this paper, we propose the equilibrium equations of the micropolar rod. Elements of the micropolar theory of deformable bodies are presented in an excellent monograph by the Cosserat brothers (Cosserat E., Cosserat F. 1898).

Consider a micropolar rod element of length ds . This element is usually acted upon by forces (Fig. 2):

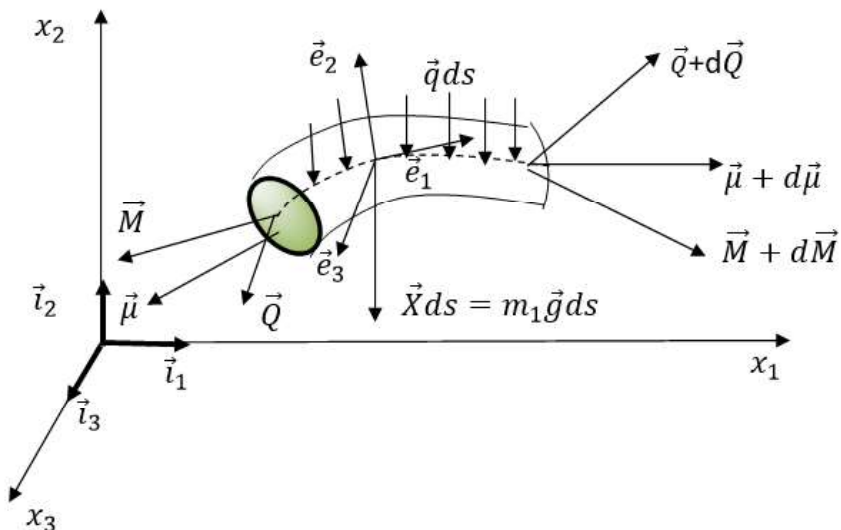


Fig.2. Element of the micropolar rod.

\vec{q} – vector of distributed load; $\vec{P}^{(i)}$ – concentrated forces, \vec{Q} – the vector of internal forces, which will be written as follows:

$$\vec{Q} = Q_1\vec{e}_1 + Q_2\vec{e}_2 + Q_3\vec{e}_3,$$

\vec{M} – the moment of the internal forces appears as follows

$$\vec{M} = M_1\vec{e}_1 + M_2\vec{e}_2 + M_3\vec{e}_3,$$

$\vec{X} = m_1\vec{g}$ – volume force, $\vec{\mu}$ – volume moment:

$$\vec{\mu} = \mu_1\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2 + \mu_3\vec{e}_3.$$

Since the rod element is in equilibrium, we have two vector equations of equilibrium:

$$d\vec{Q} + \vec{q}ds + m_1\vec{g}ds + \sum_{i=1}^3 \vec{P}^{(i)}\delta(s - s_i) ds = 0,$$

$$d\vec{M} + ds\vec{e}_1 \times \vec{Q} + ds\vec{e}_1 \times m_1\vec{g} + ds\vec{e}_1 \times \sum_{i=1}^3 \vec{P}^{(i)}\delta(s - s_i) + d\vec{\mu} = 0,$$

from which

$$\frac{d\vec{Q}}{ds} + \vec{q} + m_1\vec{g} + \sum_{i=1}^3 \vec{P}^{(i)}\delta(s - s_i) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \frac{d\vec{\mu}}{ds} + \vec{e}_1 \times \vec{Q} + \vec{e}_1 \times \sum_{i=1}^3 \vec{P}^{(i)}\delta(s - s_i) = 0. \quad (2)$$

Here $\delta(s - s_i)$ is the Dirac function.

Assuming that the moments M_1, M_2, M_3 , and μ_1, μ_2, μ_3 are proportional to the change in the rod centerline curvature and twist, we obtain six equations:

$$M_1 = A_{11}(\kappa_1 - \kappa_{10}), M_2 = A_{22}(\kappa_2 - \kappa_{20}), M_3 = A_{33}(\kappa_3 - \kappa_{30}); \quad (3)$$

$$\mu_1 = B_{11}(\chi_1 - \chi_{10}), \mu_2 = B_{22}(\chi_2 - \chi_{20}), \mu_3 = B_{33}(\chi_3 - \chi_{30}), \quad (4)$$

where κ_{10} – the rod centerline twist, while κ_{20} and κ_{30} are its curvatures in the undeformed state of the rod; A_{ii}, B_{jj} ($i, j = 1, 2, 3$) – bending and torsional stiffness, which can be written as follows:

$$A_{11} = GJ_k; A_{22} = EJ_{x_{30}}; A_{33} = EJ_{x_{20}}; \quad (5)$$

$$B_{11} = \alpha J_k; B_{22} = \nu J_{x_{30}}; B_{33} = \beta J_{x_{20}}; \quad (6)$$

where G, E, α, β, ν – the elastic constants of the material.

Note that ratios (3) and (4) are written as the main axes of inertia. Equations (1) and (2) can be written as two vector equations in the basis $\{\vec{e}_i\}$:

$$\vec{M} = A(\vec{\kappa} - \vec{\kappa}_0^{(1)}), \quad \vec{\mu} = B(\vec{\kappa} - \vec{\kappa}_0^{(1)}), \quad (7)$$

where

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix}$$

Vector $\vec{\kappa}_0$ is given in the basis $\{\vec{e}_{i0}\}$:

$$\vec{\kappa}_0 = \kappa_{10}\vec{e}_{10} + \kappa_{20}\vec{e}_{20} + \kappa_{30}\vec{e}_{30}.$$

In order to find the values of the curvature growth κ_j , we must assume that the vector $\vec{\kappa}_0^{(1)}$ remains unchanged in the basis $\{\vec{e}_i\}$ under deformation of the rod. In that event:

$$\vec{\kappa}_0^{(1)} = \kappa_{10}\vec{e}_1 + \kappa_{20}\vec{e}_2 + \kappa_{30}\vec{e}_3.$$

Let us write the equations that will connect κ_j with the rotation angles of axes $\{\vec{e}_i\}$. When moving the axes of a tripod, the axes are rotated relative to their original location at angles $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, and their location is expressed by means of these angles. Because of this, the vector $\vec{\kappa}$, which characterizes the change in the location of the axes, is also expressed by means of these angles. Let us use the ratios:

$$\vec{e}_i = \ell_{ij}\vec{e}_{j0}, \quad \vec{e}_{j0} = \ell_{kj}\vec{e}_j.$$

then we obtain:

$$\frac{d\vec{e}_i}{ds} = \epsilon_{kji}\kappa_j\vec{e}_k,$$

where ϵ_{ijk} is the Levi-Civita symbol: $\epsilon_{ijk}=+1$, if all indices are different and form an even shift; $\epsilon_{ijk}=-1$, if all indices are different and form an odd shift; $\epsilon_{ijk}=0$, if at least two indices are equal.

The values of κ_j through the angles $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ are expressed by means of the following vector formula (these formulas are detailed in the paper Mechanics of the completely flexible rods, Svetlitsky 2001:43)

$$\vec{\kappa} = L_1 \frac{\tilde{d}\vartheta}{ds} + L\vec{\kappa}_0^{(1)}, \quad (\vec{\kappa}_0^{(1)} = \kappa_{j0}\vec{e}_j), \quad (8)$$

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_2\cos\vartheta_3 & 0 & -\sin\vartheta_2 \\ -\sin\vartheta_3 & 1 & 0 \\ \sin\vartheta_2\cos\vartheta_3 & 0 & \cos\vartheta_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\tilde{d}\vartheta}{ds} = \begin{pmatrix} \vartheta'_1 \\ \vartheta'_2 \\ \vartheta'_3 \end{pmatrix}$$

$\frac{\tilde{d}\vartheta}{ds}$ – is a local derivative.

Derive the equations for the displacement vector of the centerline point. As is known, in the micropolar linear elastic theory, the volume of the microparticle does not change, it rotates without changing the volume (Eringen 1978: 646-650).

So we can write

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0 \quad \left(\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i \equiv u_i \vec{e}_i \right)$$

By derivation of this equality, we shall obtain

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} - \frac{d\vec{r}_0}{ds} = \vec{e}_i - \vec{e}_{i0}, \quad (9)$$

are unit vectors of the basis \vec{e}_{i0} in a non-deformed state of the rod.

We assume that a non-deformed state of the rod is known, which means that there are also known the vector \vec{r}_0 , the direction cosines, and the matrix L^0 connecting the basis $\{\vec{e}_{i0}\}$ to the basis $\{\vec{e}_i\}$:

$$\vec{e}_{i0} = \ell_{ij}^0 \vec{e}_j,$$

where ℓ_{ij}^0 represents the elements of the matrix L^0 which appears as follows:

$$L^0 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_2^0 & \cos\vartheta_2^0 \sin\vartheta_3^0 \cos\vartheta_1^0 + \cos\vartheta_2^0 \sin\vartheta_3^0 \sin\vartheta_1^0 - \\ & + \sin\vartheta_2^0 \sin\vartheta_1^0 & -\sin\vartheta_2^0 \cos\vartheta_1^0 \\ -\sin\vartheta_3^0 & \cos\vartheta_1^0 \cos\vartheta_3^0 & \cos\vartheta_3^0 \sin\vartheta_1^0 \\ \sin\vartheta_2^0 \cos\vartheta_3^0 & \sin\vartheta_2^0 \sin\vartheta_3^0 \cos\vartheta_1^0 - \sin\vartheta_2^0 \sin\vartheta_3^0 \sin\vartheta_1^0 + \\ & -\cos\vartheta_2^0 \sin\vartheta_1^0 & +\cos\vartheta_2^0 \cos\vartheta_1^0 \end{pmatrix},$$

while unit vectors \vec{e}_i are connected with vectors \vec{e}_{i0} by means of the ratios as follows:

$$\vec{e}_i = \ell_{ij} \vec{e}_{j0} \quad (\vec{e}_{j0} = \ell_{ij} \vec{e}_i),$$

where ℓ_{ij} – the elements of the matrix L :

$$L = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 & \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_1 - \\ & + \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_1 & -\sin\vartheta_2 \cos\vartheta_1 \\ -\sin\vartheta_3 & \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_3 & \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_1 \\ \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 & \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_1 - \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_1 + \\ & -\cos\vartheta_2 \sin\vartheta_1 & +\cos\vartheta_2 \cos\vartheta_1 \end{pmatrix}$$

The resulting equation allows for the calculation of the displacements of the centerline points.

In the case of traditional rods, these problems have been solved in the papers: Arkanian...2021, Arkanian... 2022. After solving the relevant problems taking into account the micropolar theory, it is possible to determine the influence of micropolarity on the rod shape, axial forces, and strength.