

მასალათა მექანიკა

სქელკედლიანი მილის დინამიკა წნევის მოქმედებისას

ომარ კიკვიძე

omar.kikvidze@atsu.edu.ge

მუხრან შარაბიძე

საპაკი წერილის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ქუთაისი, საქართველო

DOI: <https://doi.org/10.52340/atsu.2024.2.24.15>

განხილულია მუდმივი სისქის სქელკედლიანი მილის დინამიკა წნევის მოქმედებით. შესწავლილია სიმტკიცეზე და სიხისტეზე გაანგარიშების საკითხები მილის სიგრძის გასწვრივ თანაბარი დინამიკური წნევის მოქმედებისას. მიღებულია მილის ღერძულსიმეტრიული მოძრაობის განტოლება, რომელიც ამოიხსნება რიცხობრივად მათემატიკურ რედაქტორში *Mathcad*. კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნით და მიღებული შედეგების ანალიზით განისაზღვრება დროში ცვალებადი რადიალური გადაადგილება და ძაბვების კომპონენტები. განსაზღვრულია დინამიურობის კოეფიციენტი.

საკვანძო სიტყვები: სქელკედლიანი მილი, მოძრაობის განტოლება, რიცხვითი ამოხსნა, ძაბვა, გადაადგილება, დეფორმაცია, წნევა.

მილის მოძრაობა შიგა დინამიკური წნევის მოქმედებით შესწავლილია რიგ სამეცნიერო სტატიებში. მნიშვნელოვანი თეორიული და ექსპერიმენტალური კვლევებია შესრულებული დინამიკური დატვირთვისას, რომელიც შექმნილია გაზის დეტონაციით. ნაშრომში (Dynamic expansion modeling... 2015) წარმოდგენილია სქელკედლიანი ცილინდრის დინამიკა ზედაპირზე რღვევის წარმოქმნამდე, მასალის განმტკიცების გათვალისწინებით დეფორმაციის სიჩქარით. თეორიული მოდელი გამოიყენება, როგორც ჩვეულებრივ სიმტკიცის, ასევე მასალის დინამიკური სიმტკიცისათვის მყისიერი სასაზღვრო პირობებით, დიფერენციალური განტოლების დადგენისათვის რადიალური გადაადგილების სიჩქარის მიმართ. დეტალურად გაანალიზებულია ცილინდრის დეფორმირების ძირითადი ასპექტები: რადიალური გადაადგილება, დეფორმაციის სიჩქარე, რადიალური და

ტანგენციალური ძაბვები მასალის სხვადასხვა მახასიათებლებისათვის დეფორმაციის სიჩქარის მიმართ.

სტატიაში (Beltman 2002) განხილულია სტრუქტურის რეაქცია მილში გაზის შიგა დეტონაციაზე. შიდა დეტონაცია ქმნის დატვირთვას წნევისგან, რომელიც ვრცელდება მილში. იმდენად, რამდენადაც გაზის დეტონაციის სიჩქარე შეიძლება თანაზომადი იყოს ღუნვის ტალღების ჯგუფის სიჩქარის, საჭიროა მილის კედელში ღუნვის ტალღების წარმოქმნის გათვალისწინება. ღუნვის ტალღებმა შეიძლება გამოიწვიონ უფრო დიდი დეფორმაციები და ძაბვები, ვიდრე სტატიკურმა დატვირთვამ იგივე წნევით დატვირთვისას. სტრუქტურის რეაქციის შესწავლისათვის გამოყენებულია ექსპერიმენტი და რიცხვითი მოდელირება. ექსპერიმენტებში დეტონაციური მილი აღჭურვილია ტენზოგადამწოდებით. იზომებოდა დეფორმაციები, რომლებიც აჭარბებდა სტატიკურ დეფორმაციებს 3,9 ჯერ. ყურადღება განსაკუთრებით მახვილდება დეტონაციის სიჩქარეზე, სტრუქტურული ტალღების არეკვლაზე და ინტერფერენციაზე მილტუჩებზე და ასევე მილის ბოლოზე, გამომახილის წრფივობაზე. ანალიზური მოდელები და სასრული ელემენტების მოდელი გამოყენებულია დაკვირვებების ინტერპრეტაციისათვის და პიკური დეფორმაციის რაოდენობრივი პროგნოზირებისათვის.

ცილინდრული გარსების გაზით შიდა დეტონაციური დატვირთვა განხილულია (Mirzaei 2005, Ramezani 2020) სტატიებში. დეტონაციური დატვირთვა მოიცავს მაღალი სიჩქარეებით გავრცელებად დატვირთვებს (Mirzaei 2005). სტატიაში აღნიშნულია, რომ ღუნვითი ტალღების აღძვრა ხდება მნიშვნელოვანი. ღუნვის ტალღებმა შეიძლება გამოიწვიონ მაღალი დეფორმაციები (4 ჯერ მეტიც კი) გამოწვეული იგივე სტატიკური დატვირთვებით. ამ ნაშრომში მოცემულია ახალი ანალიტიკური მოდელი სასრული სიგრძის ცილინდრული გარსის დრეკადდინამიკური გარდამავალი რეაქციით შიდა დეტონაციურ დატვირთვაზე. ნაჩვენებია, რომ განივი ძვრების ეფექტის და ბრუნვის ინერციის გათვალისწინებით, რომლებიც გათვალისწინებულია მოდელში, უკეთ შეესაბამება ექსპერიმენტების შედეგებს, ვიდრე არსებული მოდელები.

ნაშრომში (Mirzaei 2008) მოცემულია თხელი ცილინდრული მილის დრეკად დინამიკური რეაქციის ჩაკეტილი ფორმის ამონახსნთა

ო. კიკვიძე, მ. შარაბიძე

კრებული, კონკრეტული ფროფილის შიდა მოძრავი წნევით დატვირთვისას. ახალი ამონახსნები შეიცავენ გამოსახულებებს განივი ძვრის და ღერძული დეფორმაციისათვის, პლიუს მოდიფიცირებული გამოსახულებები არეკლილი სტრუქტურული ტალღებისათვის. ეს გამოსახულებები გამოიყენება ღუნვის და ძვრის ძაბვების ტალღების შესწავლისათვის, გამოწვეული გაზის შიდა დეტონაციით და დარტყმითი დატვირთვით. ნაჩვენებია, თუ როგორ შეიძლება გამოთვლილი იქნას სამი სხვადასხვა კრიტიკული სიჩქარე, რომელთა დროსაც აღიძვრება სტრუქტურული ტალღების რეზონანსი. ძაბვების ტალღების განვითარება თხელ ალუმინის მილში შესწავლილია სიჩქარეთა ფართო დიაპაზონში და განისაზღვრება დინამიურობის (დინამიკური გაძლიერების) კოეფიციენტები. კერძოდ, შეისწავლება განივი ძვრის რეზონანსის წარმოქმნა მეორე კრიტიკულ სიჩქარეზე. დადგენილია, რომ ძვრის ძაბვის პიკური მნიშვნელობა ამ სიჩქარეზე გაცილებით მაღალია, ვიდრე სასრული ელემენტების შედეგები წარმოდგენილი სხვა მკვლევარების მიერ. ზოგადი ამონახსნის კორექტირებული ფორმა გამოიყენება თხელი მილის რეაქციის კვლევისათვის შიდა დარტყმით დატვირთვაზე. ნაწინასწარმეტყველები რხევების სპექტრი კარგად ეთანადება ლიტერატურაში მოცემულ ექსპერიმენტალურ შედეგებთან.

ღერძულსიმეტრიული ამოცანის ძირითადი განტოლებები. განვიხილოთ სქელკედლიანი მილის საანგარიშო სქემა დროში ცვალებადი წნევის მოქმედებით. ცილინდრული ფორმის ერთგვაროვანი სხეული დატვირთულია ამა თუ იმ ხერხით ისე, რომ გარე დატვირთვა არის ღერძულსიმეტრიული და მილის ღერძის გასწვრივ არ იცვლება. ცილინდრის ზომები შეიძლება იყოს ნებისმიერი, თუმცა ცილინდრის შიდა და გარე დიამეტრებს შორის არსებობს თანაფარდობა $(r_0 + r_1)/[2(r_1 - r_0)] \leq 5$ (ვალიშილი 2008).

ჩავთვალოთ, რომ ცილინდრის სიგრძე დიდია და კიდები არ ახდენენ მნიშვნელოვან გავლენას მისი ცენტრალური ნაწილის დამაბულ-დეფორმირებულ მდგომარეობაზე. ცილინდრის დეფორმაციისას ყოველი წერტილი მიიღებს გარკვეულ გადაადგილებებს. სიმეტრიის პირობიდან გამომდინარე ეს გადაადგილებები, ცხადია, მოხდება რადიალურ სიბრტყეში და წერტილი შეიძლება გადაადგილდებოდეს რადიუსის გასწვრივ.

ნებისმიერი წერტილის რადიალური გადაადგილება ავლნიშნოთ u -თი. რადიალური გადაადგილება არის რადიუსის და დროის ფუნქციას $u = u(r, t)$. დამატებული მდგომარეობა ბრტყელია. აღიძვრება ნორმალური ძაბვები რადიალური და წრიული მიმართულებით σ_r, σ_t .

ერთეულოვანი სისქის ელემენტარული მოცულობის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = \rho \ddot{u} \quad (1)$$

სადაც: ρ – მასალის სიმკვრივეა.

დეფორმაციის კომპონენტები რადიალური და წრიული მიმართულებით განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}, \quad (2)$$

ჰუკის განზოგადებული კანონით, კავშირი დეფორმაციის კომპონენტებსა და ძაბვების კომპონენტებს შორის გამოისახება თანაფარდობებით:

$$\varepsilon_r = (\sigma_r - \mu \sigma_t)/E, \quad \varepsilon_t = (\sigma_t - \mu \sigma_r)/E \quad (3)$$

(3) ფორმულებში (2) თანაფარდობების გათვალისწინებით, ძაბვების კომპონენტები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mu \frac{u}{r} \right), \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4)$$

(4) თანაფარდობების გათვალისწინებით მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\ddot{u} = \frac{E}{(1-\mu^2)\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (5)$$

სასაზღვრო პირობები: $r = r_0, \sigma_r = -p; \quad r = r_1, \sigma_r = 0$. შიგა წნევის მოქმედებისას;

$r = r_0, \sigma_r = 0, \quad r = r_1, \sigma_r = -p$ გარე წნევის მოქმედებისას.

(4) თანაფარდობების გათვალისწინებით შიგა წნევის მოქმედებისას სასაზღვრო პირობები გადაადგილებებში ჩაიწერება ასე:

$$r = r_0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\mu \frac{u}{r_0} - \frac{p}{E}(1 - \mu^2); \quad r = r_1, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\mu \frac{u}{r_1} \quad (6)$$

საწყისი პირობები: $u(r, 0) = f(r), \quad \dot{u}(r, 0) = f_1(r)$. (7)

სტატიკის ამოცანის ამონახსნს აქვს სახე (ვალიშვილი):

$$u_{st} = \frac{pr_0^2}{(r_1^2 - r_0^2)E} \left[(1 - \mu)r + (1 + \mu) \frac{r_1^2}{r} \right]. \quad (8)$$

რიცხვითი ამოხსნა. კერძოწარმოებულიანი (5) დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნისათვის შემოვიღოთ უგანზომილებო სიდიდეები:

$$\bar{r} = \frac{r}{r_1}, \quad \bar{u} = \frac{u}{r_1}, \quad \bar{p} = \frac{p}{E}, \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{E}{\rho r_1^2}} t, \quad \bar{\sigma}_{r,t} = \frac{\sigma_{r,t}}{E}$$

მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება (5) უგანზომილებო სიდიდეებში მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} = \frac{1}{(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} \right) \quad (9)$$

სასაზღვრო პირობები უგანზომილებო სიდიდეებში ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} = -\mu \frac{\bar{u}}{\bar{r}_0} - \bar{p}(1-\mu^2), \quad \bar{r} = \bar{r}_0; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} = -\mu \bar{u}, \quad \bar{r} = 1 \quad (10)$$

(4) ფორმულების თანახმად ძაბვის კომპონენტების უგანზომილებო სიდიდეებისათვის გვაქვს:

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \mu \frac{\bar{u}}{\bar{r}} \right), \quad \bar{\sigma}_t = \frac{1}{1-\mu^2} \left(\frac{\bar{u}}{\bar{r}} + \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) \quad (11)$$

ექვივალენტური ძაბვა დაყოფის წერტილებში განისაზღვრება ფორმულით [Малинин Н.Н. Прикладная теория... 2023] $\bar{\sigma}_e = \bar{\sigma}_t - \bar{\sigma}_r$.

(9) დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნისათვის ვიყენებთ წრფეების მეთოდს. ამისათვის, მილის არე რადიუსის გასწვრივ დავეყოთ მცირე ინტერვალებად და განტოლების მარჯვენა მხარეში წარმოებულეები რადიუსის მიმართ შევცვალოთ სასრულ სხვაობიანი ანალოგებით:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} = \frac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{\Delta \bar{r}^2}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} = \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta \bar{r}}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

სადაც: N – დაყოფის წერტილების რაოდენობაა, $\Delta \bar{r} = \frac{1-\delta}{N-1}$, $\delta \leq \bar{r}_i \leq 1$, $\delta = \frac{r_0}{r_1}$.

ასეთ შემთხვევაში, საწყის-სასაზღვრო ამოცანა (10) სასაზღვრო პირობებით დაიყვანება კოშის ამოცანაზე ცვლადებისათვის დაყოფის წერტილების მიმართ \bar{u}_i, \bar{w}_i :

$$\frac{d\bar{u}_i}{d\bar{t}} = \bar{w}_i, \quad (12)$$

$$\frac{d\bar{w}_i}{d\bar{t}} = \frac{1}{1-\mu^2} \left(\frac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{\Delta \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}_i} \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta \bar{r}} - \frac{\bar{u}_i}{\bar{r}_i^2} \right)$$

სასაზღვრო პირობები დაყოფის წერტილებისათვის (შიგა წნევის მოქმედებისას):

$$\begin{aligned} i = 1, \quad \bar{u}_{i-1} &= \bar{u}_{i+1} + 2\Delta \bar{r} \left[\frac{\mu \bar{u}_i}{\delta} + \bar{p}(1-\mu^2) \right], \\ i = N, \quad \bar{u}_{i+1} &= \bar{u}_{i-1} - 2\mu \Delta \bar{r} \bar{u}_i. \end{aligned} \quad (13)$$

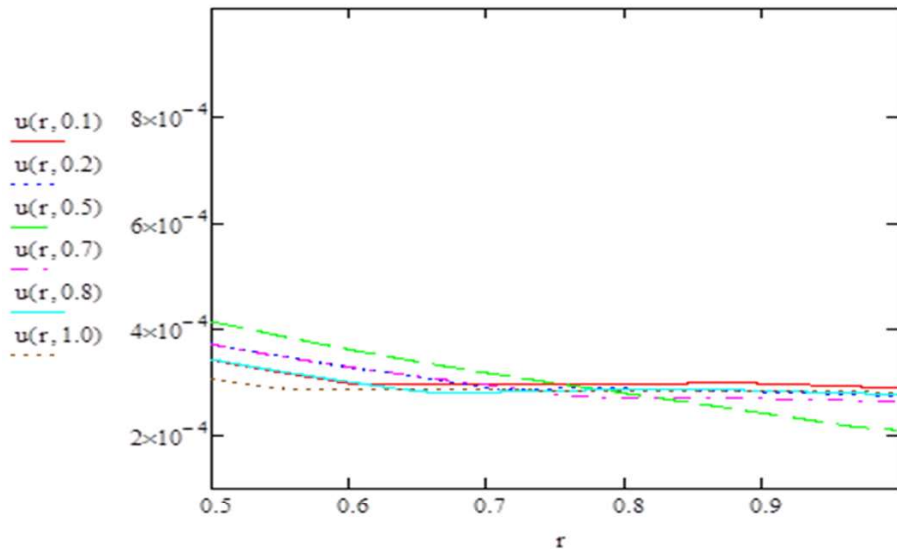
$$\text{საწყისი პირობები : } \bar{t} = 0, \quad \bar{u}_i = f(\bar{r}_i), \quad \bar{w}_i = f_1(\bar{r}_i). \quad (14)$$

(11) თანაფარდობების გამოყენებით განისაზღვრება ძაბვის კომპონენტების უგანზომილებო სიდიდეები დაყოფის წერტილებში დროის ყოველ მომენტში.

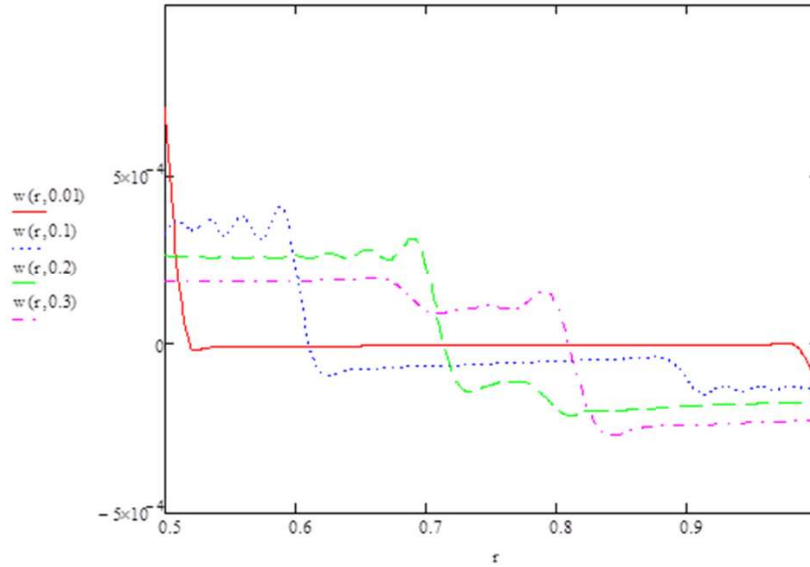
$$\bar{\sigma}_{ri} = \frac{1}{1 - \mu^2} \left(\frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta\bar{r}} + \mu \frac{\bar{u}_i}{\bar{r}_i} \right), \quad \bar{\sigma}_{ti} = \frac{1}{1 - \mu^2} \left(\frac{\bar{u}_i}{\bar{r}_i} + \mu \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta\bar{r}} \right)$$

(12) განტოლებათა სისტემა (14) საწყისი პირობებით ამოხსნილი იქნა მათემატიკური რედაქტორის Mathcad-ის გამოყენებით (Кирьянов 2008). გამოყენებულია ჩაშენებული ფუნქცია pdsolve.

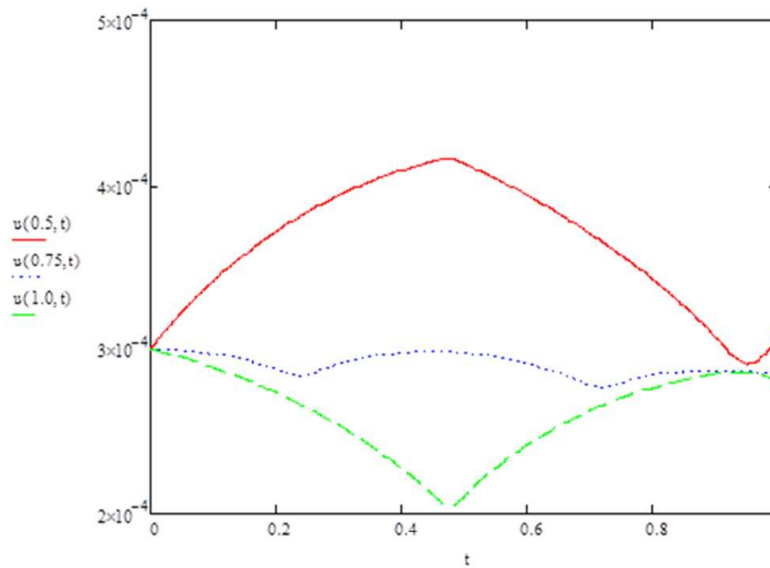
რიცხვითი გაანგარიშებები შესრულებულია შემდეგი მნიშვნელობებისათვის: $\bar{u}(r, t_0) = \bar{p}$, $\bar{w}_i = 0$, $\mu = 0.3$, $\bar{p} = 0.0003$. ნახ.1 - ნახ.3 მოცემულია რიცხვითი გაანგარიშების შედეგები.



ნახ.1. უგანზომილებო რადიალური გადაადგილების ცვლილება რადიუსის მიხედვით დროის სხვადასხვა მომენტისათვის.

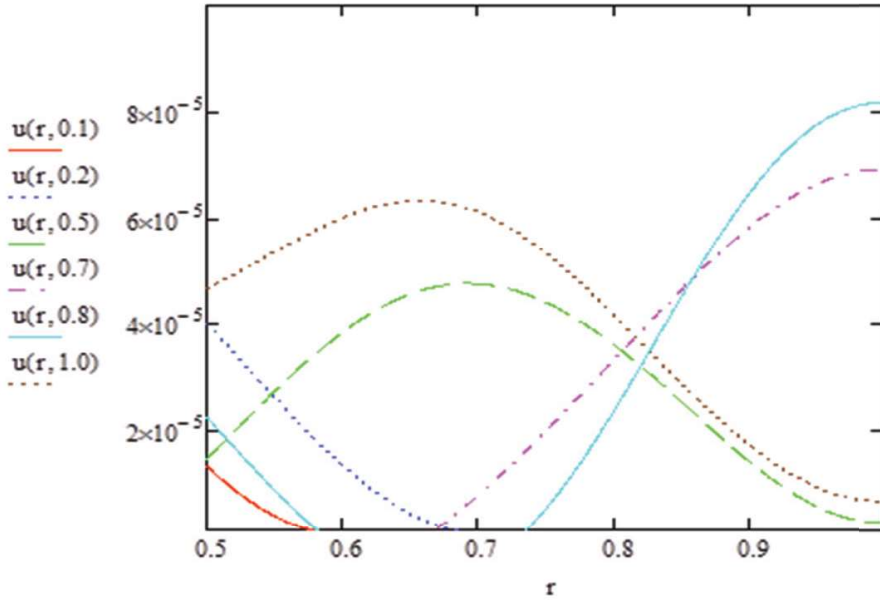


ნახ. 2. უგანზომილებო რადიალური სიჩქარის ცვლილება რადიუსის მიხედვით დროის სხვადასხვა მომენტისათვის.

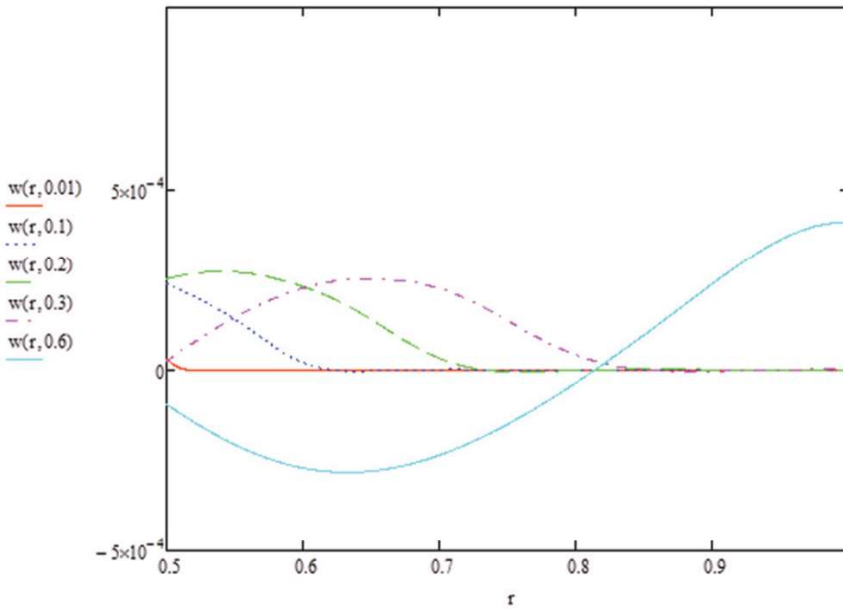


ნახ. 3. შიდა, შუა და გარე ზედაპირების უგანზომილებო გადაადგილებების ცვლილება დროში

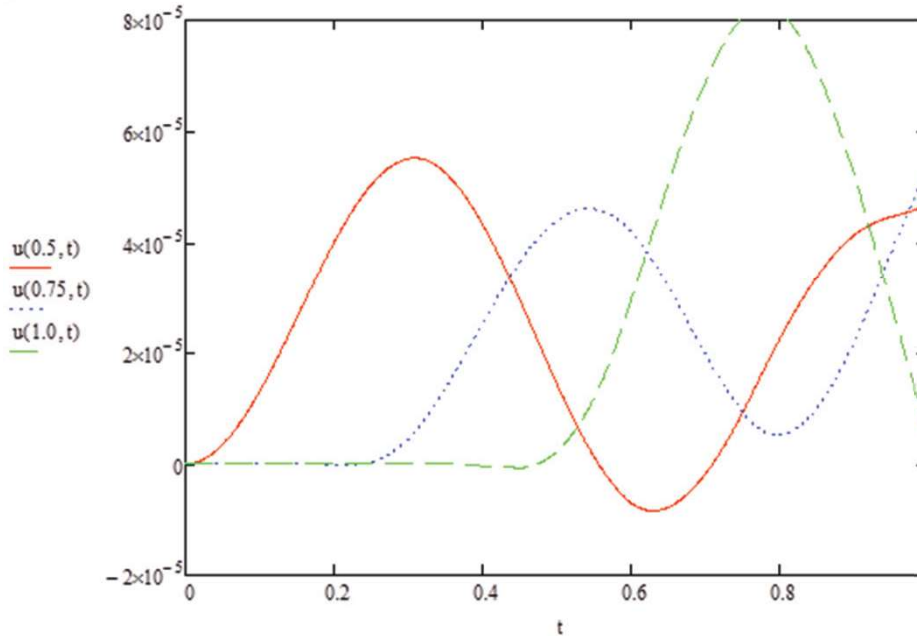
მე-4, მე-5 და მე-6 ნახ. მოცემულია რიცხვითი გაანგარიშების შედეგები შემთხვევისათვის, როცა წნევა იცვლება სინუსოიდალური ჰარმონიული კანონით: $\bar{u}(\bar{r}, \bar{t}_0) = 0, \bar{u}'(\bar{r}, \bar{t}_0) = 0, \mu = 0.3, \bar{p} = 0.0003 \sin(10\bar{t})$



ნახ. 4. უგანზომილებო რადიალური გადაადგილების ცვლილება რადიუსის მიხედვით დროის სხვადასხვა მომენტისათვის.



ნახ. 5. უგანზომილებო რადიალური სიჩქარის ცვლილება რადიუსის მიხედვით დროის სხვადასხვა მომენტისათვის.



ნახ. 6. შიდა, შუა და გარე ზედაპირების უგანზომილებო გადაადგილებების ცვლილება დროში.

სტატიკური გადაადგილება შიდა ზედაპირზე (8) ფორმულის შესაბამისად ტოლია: $\bar{u}_{სტ} = 0.987 \bar{p} = 2.961 * 10^{-4}$; ნახ.1, ნახ.3 ჩანს, რომ რიცხვითი გაანგარიშებით მაქსიმალური გადაადგილება შიდა ზედაპირზე ტოლია $\bar{u} = 4.15 * 10^{-4}$. შესაბამისად, დინამიურობის კოეფიციენტი ტოლია $k_{დ} = \bar{u} / \bar{u}_{სტ} = 1.4$

ლიტერატურა

- ვალიშვილი, ნ. დ., გორხელიძე. 2008. *მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობა. ჯისიაი.*
- Beltman, W.M. Shepherd, J.E. 2002: "Linear elastic response of tubes to internal detonation loading," *Journal of Sound and Vibration*, 252 (4), 2002: 617-655.
- "Dynamic expansion modeling of thick-walled cylinder under internal high strain rate loading," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, November, 24(1), 2015:1-36.
DOI:[10.1080/15376494.2015.1095374](https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1095374)

- Mirzaei, M. Mazaheri, K. Biglari, H. 2005. "Analytical modeling of the elastic structural response of tubes to internal detonation loading," *Int J Press Vessels Pip*, 82(12), 2005: 883–895.
- Mirzaei, M. 2008. "On amplification of stress waves in cylindrical tubes under internal dynamic pressures," *Int J Mech Sci*, 50(8), 2008: 1292–1303
- Ramezani, H. 2020. "Mirzaei Transient elastodynamic behavior of cylindrical tubes under moving pressures," *Applied Mathematical Modelling* 2020.
- Кирьянов, Д.В. 2006. *Самоучитель Mathcad 13*.-СПб.: БХВ-Петербург.
- Малинин, Н.Н. 2023. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. 3-е изд., испр. и доп. Москва : Издательство Юрайт.

Mechanics of Materials

Dynamics of a thick-walled pipe under pressure

Omar Kikvidze

omar.kikvidze@atsu.edu.ge

Mukhran Sharabidze

Akaki Tsereteli State University

Kutaisi, Georgia

DOI: <https://doi.org/10.52340/atsu.2024.2.24.15>

The dynamics of a thick-walled pipe of constant thickness under the action of pressure is discussed. The issues of strength and stiffness calculation under the action of equal dynamic pressure along the length of the pipe are studied. The equation of the axisymmetric movement of the pipe is obtained, which is solved numerically in the mathematical editor Mathcad. By solving the partial differential equation and analyzing the obtained results, the time-varying radial displacement and stress components are determined. The dynamicity coefficient was defined.

Keywords: thick-walled pipe; equation of motion; numerical solution; stress; displacement; strain; pressure.

Basic equations of the axisymmetric problem. Let us consider the design scheme of a thick-walled pipe with time-variable pressure. A homogeneous body of a cylindrical shape is loaded in some way so that the external load is axisymmetric and does not change along the axis of the pipe.

Assume that the length of the cylinder is large and the edges do not significantly affect the stress-strain state of its central part. During the deformation of the cylinder, each point experiences certain displacements. Due to the symmetry condition, these displacements will obviously occur in a radial plane, and the point can be displaced along the radius. We denote the radial displacement of every point by u . Radial displacement is a function of radius and time $u = u(r, t)$. The stress state is flat. Normal stresses are induced in radial and circular directions σ_r, σ_t .

The differential equation of motion of an elementary volume of unit thickness has the form as follows:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = \rho \ddot{u}, \quad (1)$$

where ρ is the density of the material.

Strain components in the radial and circular directions are determined by the formulas:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}, \quad (2)$$

Stress components are determined by the formulas:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mu \frac{u}{r} \right), \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4)$$

Taking account of the ratios (4), the differential equation of motion takes the following form:

$$\ddot{u} = \frac{E}{(1-\mu^2)\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (5)$$

Boundary conditions: $r = r_0, \sigma_r = -p; \quad r = r_1, \sigma_r = 0$. Under the action of internal pressure:

$r = r_0, \sigma_r = 0, \quad r = r_1, \sigma_r = -p$ – under the action of external pressure.

In view of the ratios (4), the boundary conditions under the action of internal pressure can be written as:

$$r = r_0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\mu \frac{u}{r_0} - \frac{p}{E} (1 - \mu^2); \quad r = r_1, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\mu \frac{u}{r_1} \quad (6)$$

Initial conditions:

$$u(r, 0) = f(r), \quad \dot{u}(r, 0) = f_1(r). \quad (7)$$

A static solution has the following form (Valishvili):

$$u_{st} = \frac{pr_0^2}{(r_1^2 - r_0^2)E} \left[(1 - \mu)r + (1 + \mu) \frac{r_1^2}{r} \right]. \quad (8)$$

Numerical solution. For the numerical solution of partial differential equation (5), let us introduce dimensionless quantities:

$$\bar{r} = \frac{r}{r_1}, \quad \bar{u} = \frac{u}{r_1}, \quad \bar{p} = \frac{p}{E}, \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{E}{\rho r_1^2}} t, \quad \bar{\sigma}_{r,t} = \frac{\sigma_{r,t}}{E}$$

The partial differential equation of motion (5) in the dimensionless quantities takes the following form:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} = \frac{1}{(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} \right) \quad (9)$$

Boundary conditions in dimensionless quantities can be written as follows:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} = -\mu \frac{\bar{u}}{\bar{r}_0} - \bar{p}(1 - \mu^2), \quad \bar{r} = \bar{r}_0; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} = -\mu \bar{u}, \quad \bar{r} = 1 \quad (10)$$

We use the method of straight lines for the numerical solution of the differential equation (9). To do this, divide the area of the pipe along the radius into small segments and replace the derivatives on the right side of the equation with respect to the radius by analogs with finite differences:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} = \frac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{\Delta \bar{r}^2}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} = \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta \bar{r}}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

where N – the number of the division points, $\Delta \bar{r} = \frac{1 - \delta}{N - 1}$, $\delta \leq \bar{r}_i \leq 1$, $\delta = \frac{r_0}{r_1}$.

In this case, the initial-boundary problem (10) with boundary conditions is reduced to the Cauchy problem for the variables with respect to the division points \bar{u}_i, \bar{w}_i :

$$\frac{d\bar{u}_i}{d\bar{t}} = \bar{w}_i, \quad \frac{d\bar{w}_i}{d\bar{t}} = \frac{1}{1 - \mu^2} \left(\frac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{\Delta \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}_i} \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta \bar{r}} - \frac{\bar{u}_i}{\bar{r}_i^2} \right)$$

The boundary conditions for the division points (under the action of internal pressure):

$$i = 1, \quad \bar{u}_{i-1} = \bar{u}_{i+1} + 2\Delta \bar{r} \left[\frac{\mu \bar{u}_i}{\delta} + \bar{p}(1 - \mu^2) \right], \quad (13)$$

$$i = N, \quad \bar{u}_{i+1} = \bar{u}_{i-1} - 2\mu \Delta \bar{r} \bar{u}_i.$$

Initial conditions:

$$\bar{t} = 0, \quad \bar{u}_i = f(\bar{r}_i), \quad \bar{w}_i = f_1(\bar{r}_i). \quad (14)$$

მ. კოეფიციენტი, მ. შარბილი

Using the ratios (11), the dimensionless values of stress components at the division points are determined at any given time.

$$\bar{\sigma}_{ri} = \frac{1}{1 - \mu^2} \left(\frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta\bar{r}} + \mu \frac{\bar{u}_i}{\bar{r}_i} \right), \quad \bar{\sigma}_{ti} = \frac{1}{1 - \mu^2} \left(\frac{\bar{u}_i}{\bar{r}_i} + \mu \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta\bar{r}} \right)$$

The system of equations (12) with initial conditions (14) was solved using the mathematical editor Mathcad (Kiryanov D.V. Tutorial). The built-in function *pdesolve* was used.

Numerical calculations have been performed for the following values: $\bar{u}(r, t_0) = \bar{p}$, $\bar{w}_i = 0$, $\mu = 0.3$, $\bar{p} = 0.0003$. Fig. 1 - Fig. 3 illustrate the results of the numerical calculation.

Fig. 4 - Fig. 6 show the results of the numerical calculation for the case when pressure changes according to the sinusoidal harmonic law: $\bar{u}(\bar{r}, \bar{t}_0) = 0$, $\dot{\bar{u}}(\bar{r}, \bar{t}_0) = 0$, $\mu = 0.3$, $\bar{p} = 0.0003 \sin(10\bar{t})$.

Static displacement on the inner surface, according to the formula (8), is equal to: $\bar{u}_{st} = 0.987 \bar{p} = 2.961 * 10^{-4}$. Figures 1 and 3 illustrate that numerically, the maximum displacement on the inner surface is equal to $\bar{u} = 4.15 * 10^{-4}$. Accordingly, the dynamicity coefficient is equal to $k_d = \bar{u} / \bar{u}_{st} = 1.4$