ანალიზი

ბლიაშკე–ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლის ქორდალური ვარიაცია

გიორგი თეთვაძე
giorgi.tetvadze@atsu.edu.ge
ლილი თეთვაძე
იური თვალოძე
ლამარა ციბაძე
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო

ნაშრომში დადგენილია საკმარის პირობები იმისა, რომ ბლიაშკე - ჯერბაშიანის კანონიკურ ნამრავლს გააჩნდეს სასრული ქორდალური ვარიაცია.

საკვანძო სიტყვები: *ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლი, ქორდალური ვარიაცია.*

დასაწყისში შემოვიღოთ ზოგიერთი აღნიშვნა და განმარტება:

$\mathbb{C}$ - კომპლექსურ რიცხვთა ველი.

$\mathbb{D} = \{z: |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ -ერთეულოვანი წრე.

$V_\varphi(e^{i\theta}) -$ შტოლცის კუთხე, ე. ი. $e^{i\theta}$ ე წერტილიდან გავლებული ორი ქორდით შედგენილი $2\varphi -$ ⍰ $, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ტოლი კუთხე, რომლებისთვსაც $[0; e^{i\theta}]$ რადიუსი ბისექტრისაა.

$\Delta\varphi(e^{i\theta}, z) = \{z: |z - e^{i\theta}| < 1 - \mathrm{r},\ 0 < r < 1, z \in \mathbb{C}, \} \cap V\varphi(e^{i\theta}) - e^{i\theta}$ წერტილის სამკუთხა მიდამო.

M სიმრავლის ჩაკეტვა ავღნიშნოთ - $\bar{M}$-ით.

ზღვარს $\lim\limits_{\substack{z \to e^{i\theta} \\ z \in V\varphi(e^{i\theta})}} f(z) = \lim\limits_{z \hat{\to} e^{i\theta}} f(z)$ ეწოდება f ფუნქციის კუთხური სასაზღვრო მნიშვნელობა $e^{i\theta}$ წერტილში.

ერთეულოვან წრეში ანალიზური ფუნქცის სასაზღვრო მნიშვნელობის შესწავლის დროს მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ბლიაშკეს ნამრავლი (Bliashke, 1915)

$$B(z, (a_n)) = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} \left(1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n} z}\right),$$

სადაც $\lambda + 1$ ნატურალური რიცხვია, $0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| < 1, \lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = 1,$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)<+\infty.$$

იმ შემთხვევისთვის, როცა $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)=+\infty$ არსებობს ბლიაშკეს ნამრავლის სხვადასხვა განზოგადებები (Picard E. 1926, Джербашян, М. 1945, 1948, 1961, Тетвадзе, Г. 1980, Tsuji, 1955).

ბლიაშკე - ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლს (Джербашян М. М., 1945) აქვს სახე

$$\mathcal{B}_P(z,(a_n))=z^{\lambda}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)^k\right),$$

სადაც $\lambda+1$ და p ნატურალური რიცხვებია $0<|a_n|\leq|a_{n+1}|<1, \lim_{n\to\infty}|a_n|=1, |z|<1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^P=+\infty, \sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^{P+1}<+\infty$$

უსასრულო ნამრავლი $\mathcal{B}_P(z,(a_n))$ თანაბრად და აბსოლიტურად კრებადია ერთეულოვანი ღია წრის შიგნით, რის გამოც იგი წარმოადგენს ანალიზურ ფუნქციას ნულებით

$$\underbrace{0,0,\dots 0}_{\lambda}, a_1, a_2, \dots a_n, \dots$$

შევნიშნოთ, რომ ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლი არის ჯებაშიანის ნამრავლის (Джербашян М. М., 1948) კერძო შემთხვევა.

რუდინმა (Rudin, 1955) აჩვენა, რომ პირობა

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-|a_n|}{|e^{i\theta}-a_n|}<+\infty \qquad (1)$$

საკმარისია იმისთვის, რომ ბლიაშკეს ნამრავლს $B(z,(a_n))$ $e^{i\theta}$ წერტილში ჰქონდეს სასრული რადიალური ვარიაცია, ე.ი. $e^{i\theta}$ წერტილში გავლებული რადიუსი აისახება წრფევად წირში. კარგომ (Cargo G. T., 1962) აღმოაჩინა, რომ (1) პირობა აუცილებელი და საკმარისია იმისთვის, რომ $B(z,(a_n))$ ნამრავლს და ყველა მის ქვეთანამამრავლს გააჩნდეს $e^{i\theta}$ წერტილში სასრული ქორდალური ვარიაცია ე.ი. მონაკვეთი $[a, e^{i\theta}]$, ნებისმიერი $a-$სათვის $|a|<1$ აისახება წრფევად წირში.

აერნმა და კლრკმა (Ahern & Clark, 1971) დაამტკიცეს, რომ პირობა

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-|a_n|}{|e^{i\theta}-a_n|^{k+1}}<+\infty \qquad (2)$$

აუცილებელი და საკმარისია, რომ $B(z,(a_n))$ ნამრავლის და ყველა მის ქვეთანამამრავლის k რიგის წარმოებულს ქონდეს $e^{i\theta}$ წერტილში ქონდეს

რადიალური ზღვარი. პროტასმა (Protas, 1972) აჩვენა, რომ (2) პირობა აუცილებელი და საკმარისია იმისთვის, რომ $B(z,(a_n))$ ნამრავლის და ყველა მის ქვეთანამამრავლის k რიგის წარმოებულს ქონდეს სასრული რადიალური ვარიაცია.

ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით ანალოგიურ საკითხებს ბლიშკე-ჯერბაშიანის ნამრავლისთვის.

ლემა 1. თუ $0<|a_n|\le |a_{n+1}|<1$ (n = 1,2, ...), $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^{\mathrm{P}}=+\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^{\mathrm{P}}<+\infty$, $\mathrm{P}-$ და $\lambda+1$ ნატურალური რიცხვებია, $\mathcal{D}\subset\mathbb{D}$ ღია სიმრავლეა და $\mathcal{D}\cap\{0,\ a_1,a_2,\dots\}=\emptyset$. მაშინ ყოველი z -სათვის, $z\in\mathcal{D}$ გვაქვს

$$B'_{P+1}(z,(a_n))=B_{P+1}(z,(a_n))\left(\frac{\lambda}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\propto'(z,a_n)\propto^n(z,a_n)}{\propto(z,a_n)-1}\right),$$

სადაც $\propto(z,a_n)=\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}$.

დამტკიცება. ავღნიშნოთ

$$A(z,a_n)=\left(1-\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)^k\right),$$

$$A(z,a_n)=\left(1-\propto(z,a_n)\right)exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\propto^k(z,a_n)\right).$$

მაშინ ცხადია

$$B_{P+1}(z,(a_n))=z^{\lambda}\prod_{n=1}^{+\infty}A(z,a_n).$$

როცა $z\in\mathbb{D}$ გვექნება

$$B'_{P+1}(z,(a_n))=\lambda z^{\lambda-1}\prod_{n=1}^{+\infty}A(z,a_n)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{B_{P+1}(z,(a_n))}{A(z,(a_n))}\cdot A'(z,a_n)=$$

$$B_{P+1}(z,(a_n))\left(\frac{\lambda}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A'(z,a_n)}{A(z,a_n)}\right). \qquad (3)$$

ცხადია

$$A'(z,a_n)=-\propto'(z,a_n)exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\propto'(z,a_n)\right)+$$

$$+(1-\propto(z,a_n))exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\propto'(z,a_n)\right)\times\sum_{k=1}^{P}\propto^{k-1}(z,a_n)\propto'(z,a_n).$$

ამ უკანსკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$A'(z,a_n) = \propto'(z,a_n) exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\propto'(z,a_n)\right)$$
$$\times\left(-1+\sum_{k=1}^{P}\propto^{k-1}(z,a_n)-\sum_{k=1}^{P}\propto^{k}(z,a_n)\right)=$$
$$= -\propto'(z,a_n)\, exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\propto^{k}(z,a_n)\right)\cdot\propto^{n}(z,a_n)$$
$$=\frac{\propto'(z,a_n)\propto^{n}(z,a_n)}{\propto(z,a_n)}\cdot A(z,a_n).$$

აქედან და (3)-დან გვექნება

$$B'_{P+1}\big(z,(a_n)\big) = B_{P+1}\big(z,(a_n)\big)\left(\frac{\lambda}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\propto'(z,a_n)\propto^{n}(z,a_n)}{\propto(z,a_n)-1}\right).$$

ლემა დამტკიცებულია.

კარგომ (Cargo G. T., 1963) დაამტკიცა შემდეგი:

ლემა 2. თუ $|a|<1, b\in\mathbb{C}, \gamma=\frac{b(1-a)}{1-ba}$, მაშინ

$$\int_0^1\frac{dz}{|1-\gamma z|^2}\le\frac{\frac{\pi}{2}(1+|a|)}{sin\frac{\pi(1+|a|)}{2}}\cdot\frac{|1-ab|}{1-b}.$$

ლემა 3. თუ $z=z(r)=a+(1-a)r, (a)<1, 0\le r<1$, მაშინ არსებობს ისეთი $M>0$ რიცხვი, რომ როცა $a\ne a_n$

$$\mathrm{I}_n=\int_0^1\left|\frac{\propto'(z,a_n)}{1-\propto(z,a_n)}\right|z'(r)\,dr\le M, (n=1,2,\dots$$

დამტკიცება.

$$\mathrm{I}_n=\int_0^1\left|\frac{\propto'(z,a_n)}{1-\propto(z,a_n)}\right||z'(r)|dr=\int_0^1\left|\frac{\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)'}{1-\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}}\right||z'(r)|dr=$$

$$\int_0^1\left|\frac{\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}}{-\frac{\overline{a_n}(z-a_n)}{1-\overline{a_n}z}}\right||1-a|dr=|1-a|\int_0^1\left|\frac{1-|a_n|^2}{|z-a_n||1-\overline{a_n}z|}\right|dr$$

ე.ი.

$$\mathrm{I}_n=\big(1-|a_n|^2\big)(1-a)\int_0^1\left|\frac{z(r)-a_n}{1-\overline{a_n}z(r)}\right|\cdot\frac{dr}{|z(r)-a_n|^2}\le$$
$$\le\big(1-|a_n|^2\big)(1-a)\int_0^1\frac{dr}{|a+(1-a)r-a_n|^2}=$$

$$= \frac{\left(1-|a_n|^2\right)(1-a)}{|a-a_n|^2}\int_0^1 \frac{dr}{\left|1+\frac{1-a}{a-a_n}r\right|^2}. \qquad (4)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\gamma_n = \frac{1-a}{a-a_n} = \frac{\frac{1}{a_n}(1-a)}{a-\frac{1}{a_n}a}. \qquad (5)$$

(4) და (5)-დან მივიღებთ

$$\mathrm{I}_n \le \frac{\left(1-|a_n|^2\right)(1-a)}{|a-a_n|^2}\int_0^1 \frac{dr}{|1+\gamma_n r|^2}.$$

აქედან ლემა 2-ის ძალით მივიღებთ

$$\mathrm{I}_n \le \frac{\left(1-|a_n|^2\right)(1-a)}{|a-a_n|^2}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}(1+|a|)}{sin\frac{\pi(1+|a|)}{2}}\cdot\frac{\left|1-\frac{a}{a_n}\right|}{\left|1-\frac{1}{a_n}\right|} \le$$

$$\le \frac{2\left(1-|a_n|^2\right)(1-a)}{|a-a_n|^2}\cdot\frac{\pi(1+|a|)}{sin\frac{\pi(1+|a|)}{2}}\cdot\frac{|a_n-a|}{|a_n-1|}$$

$$\le \frac{2\pi\left|1+|a|\right|}{|a-a_n| sin\frac{\pi(1+|a|)}{2}}. \quad (6)$$

ავღნიშნოთ $\min\{|a-a_n|\} = b$,მაშინ (6)-დან მივიღებთ

$$\mathrm{I}_n \le b\frac{2\pi\left|1+|a|\right|}{sin\frac{\pi(1+|a|)}{2}} = M(a)$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა. თუ

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|\ e^{i\theta}-a_n|}\right)^{P+1} < +\infty \qquad (7)$$

მაშინ ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკურ ნამრავლს $e^{i\theta}$ წერტილში აქვს სასრული ქორდალური ვარიაცია.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ჩავთვალოთ, რომ $\theta = 0$. მონაკვეთის განტოლებას, რომელიც აერთებს a და $z = 1$ წერტილებს, აქვს სახე

$$z(r) = a + (1-a)r \qquad 0 \le r \le 1$$

თეორემის დამტკცებისათვის უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$\int_0^1 |\mathrm{B}'_{P+1}(z(r),(a_n))|\,|z'(r)|dr < +\infty. \qquad (8)$$

(7) პირობის ძალით

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-|a_n|}{|1-a_n|}=0,$$

ამიტომ იარსებებს $z = 1^{\theta}$ წერტილის ისეთი სამკუთხა მიდამო $\Delta_{\varphi}(1, z_0) = \{z: |z-1| < r_0 - 1,$
$0 < r_0 < 1,\ z \in \mathbb{C}\} \cap V_{\varphi}(1)$ რომ

$$\Delta_{\varphi}(1, r_0) \cap \{a_1, a_2, \dots\} = \emptyset \qquad (9)$$

ამასთან φ კუთხე ისე შეგვიძლია ავირჩიოთ, რომ $a \in V_{\varphi}(1)$ შტოლცის კუთხეს, ამიტომ a და $z = 1$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი $[a, 1]$ მთლიანად მიეკუთვნება $V_{\varphi}(1)$ კუთხეს. ცხადია იარსებებს ისეთი წერტილი b $\in [a, 1]$, რომ $b \in \Delta_{\varphi}(1, r)$.

$$\int_0^1 \left|\mathrm{B}'_{P+1}\big(z(r),(a_n)\big)\right||z'(r)|dr\,dr = \int_0^{r_0} \left|\mathrm{B}'_{P+1}\big(z(r),(a_n)\big)\right||z'(r)|dr\,dr +$$

$$+\int_{r_0}^1 |\mathrm{B}'_{P+1}(z(r),(a_n)\,)||z'(r)|dr.$$

ამ უკანსკნელ ტოლობაში იმის გამო, რომ $\mathrm{B}'_{P+1}(z,(a_n)\,)$ უწყვეტი ფუნქციაა წრეში $z \le r_0$ ამიტომ ცხადია პირველი შესაკრები იქნება სასრული რიცხვი და მაშასადამე თეორემის დამტკიცებისათვის საკმარისი იქნება ვაჩვენოთ, რომ

$$\int_{r_0}^1 \left|\mathrm{B}'_{P+1}\big(z(r),(a_n)\big)\right|\,dr + \infty. \qquad (10)$$

თეორემა 1.-ის ძალით φ და r_0 ისე შეგვიძლია შევარჩიოთ, რომ $B_{P+1}\big(z,(a_n)\big)$ იყვეს უწყვეტი ფუნქცია $\overline{\Delta_{\varphi}(1, r_0)}$ სამკუთხა მიდამოზე, ამიტომ იგი ამ მიდამოზე იქნებ შემოსაზღული რაიმე $M_1 > 0$ რიცხვით.

პირველი ლემის ძალით

$$\mathrm{B}'_{P+1}(z,(a_n)\,) = B_{P+1}\big(z,(a_n)\big)\left(\frac{\lambda}{r_0} + \frac{\propto'(z,a_n)\propto^{n}(z,a_n)}{\propto(z,a_n)-1}\right).$$

აქედან კი მივიღებთ

$$\left|\mathrm{B}'_{P+1}\big(z,(a_n)\big)\right| \le M_1\left(\frac{\lambda}{r_0} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\propto'(z,a_n)\propto^{n}(z,a_n)|}{|1-\propto(z,a_n)|}\right). \qquad (11)$$

სტატიაში (Tetvadze, Tetvadze, & Tsibadze, 2021) ნაჩვენები იყო, რომ თეორემის პირობებში არსებობს ისეთი N ნატურალური რიცხვი, რომ

$$\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|} < q < 1, \qquad z \in \overline{\Delta_{\varphi}(1, r_0)}, \qquad (12)$$

(11) და (12)-დან მივიღებთ, როცა $z \in \overline{\Delta_{\varphi}(1, r_0)}$ მაშინ

$$\left|B'_{P+1}(z,(a_n))\right| \le M_1\left(\frac{\lambda}{r_0}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\propto'(z,a_n)\propto^n(z,a_n)|}{|1-\propto(z,a_n)|}+\sum_{n=1}^{+\infty}q^n\frac{|\propto'(z,a_n)|}{|1-\propto(z,a_n)|}\right). \quad (13)$$

მესამე ლემის ძალით არსებობს ისეთი $M>0$ რიცხვი, რომ

$$\int_0^1\frac{|\propto'(z(r),a_n)|}{1-\propto(z(r),a_n)}dr \le M. \qquad (14)$$

(13) და (14)-დან მივიღებთ,

$$\left|B'_{P+1}(z(r),(a_n))\right| \le M_1\left(\frac{\lambda}{r_0}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\propto^n(z(r),a_n)\propto'(z,a_n)|}{|1-\propto(z(r),a_n)|}+\sum_{n=1}^{+\infty}q^n\frac{|\propto'(z(r),a_n)|}{|1-\propto(z(r),a_n)|}\right) \le$$

$$\le M_1\left(\int_{r_0}^{1}\left(\frac{\lambda}{r_0}+\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{\propto^n(z(r),a_n)\propto'(z,a_n)}{1-\propto(z(r),a_n)}\right|+\frac{q^nM}{1-q}\right)\right)<+\infty$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ლიტერატურა

Ahern, P. R., & Clark, P. N. (1971). Radial nth derivatives of Blaske Product. Mathematica Scandinavica, 189-201.

Bliashke, W. (1915). Eine Erweitezung des latses von Vitali uber Folgen anlytischez Functuionen. Leipziger Berichte, 194-200.

Cargo, G. T. (1962). Angular and tangential limits of Blaske products and tier derivative. Vand. J. Math. N14, 334-348.

Cargo, G. T. (1963). The segmental variation of Blaschke Product. Duke Mathematical Jurnal, 143-149.

Picard, E. (1926). Traitc d'Analyse.

Protas, D. (1972). On te accumulation of the zeros of a Blashke oridcut ar a Boundary Points. Math. Soc. V 34 N2, 486-496.

Rudin, W. (1955). The radial variation of analytic functions. Duke Mathematical Jurnal, 235-242.

Tetvadze, G., Tetvadze, L., & Tsibadze, L. (2021). On boundary properties of the boundary values of Blshke-Djerbashian Canonical product. Moambe, 195-201.

Джербашян, М. М. (1945). О каноническом представлении мероморфных в единственном круге функции. Доклады Академии Наук Армянский ССР 3, N1, 3-9.
Джербашян, М. М. (1948). К проблеме представитимости аналитических функций. Сообщение, Институт математики и механики, Вип N2, 3-40.
Тетвадзе, Г. (1980). О граничных своиствах произведений типа Бляшке в единичном круге. Сообщение, Академия наук, ГССР, 99, N3, 537-539.

Analysis

Chordal variation of Bliashke-Djerbashyan Canonical product

Giorgi Tetvadze
giorgi.tetvadze@atsu.edu.ge
Lili Tetvadze
Iuri Tvalodze
Lamara Tsibadze
Akaki Tsereteli State University
Kutaisi, Georgia

The paper establishes sufficient conditions for Bliashke-Djerbashyan Canonical product, in order to have limited chordal variation.

Keywords: *Canonical product of Blaschke–Djerbashyan, chordal variation.*

For the beginning, we have some definitions:

$\mathbb{C}$ - the Field of complex numbers.

$\mathbb{D} = \{z: |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ - Unit disk.

$V_\varphi(e^{i\theta}) -$ Stolz Angle, is an angle equal to $2\varphi, 0 < \varphi < \pi/2$ and is formed by two chords that come out of the point $e^{i\theta}$, radius $[0; e^{i\theta}]$ is bisector, $0 < \varphi < \pi/2$.

$\Delta\varphi(e^{i\theta}, z) = \{z: |z - e^{i\theta}| < 1 - \mathrm{r},\ 0 < r < 1, z \in \mathbb{C},\} \cap V\varphi(e^{i\theta}) -$ triangular neighborhood of the $e^{i\theta}$point.

By $\bar{M}$ denote the closure of of the set M.

The limit $\lim\limits_{\substack{z\to e^{i\theta} \\ z\in V\varphi(e^{i\theta})}} f(z) = \lim\limits_{z \hat{\to} e^{i\theta}} f(z)$ is the angular boundary value of the function f in the $e^{i\theta}$ point.

Blaschke Product plays an important role in the study of boundary values of the analytic function in the unit disk (Blaschke W, … 1915).

$$B\big(z,(a_n)\big) = z^{\lambda}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\cdot\frac{a_n - z}{1-\overline{a_n}z} = z^{\lambda}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|}\left(1-\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right),$$

where $\lambda + 1$ is natural number, $0 < |a_n| \le |a_{n+1}| < 1$, $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|) < +\infty$$

in case, when $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|) = +\infty$, there are different generalizations of Blaschke Product (Picard E. ... 1926, Джербашян, М. …1945, 1948, 1961, Тетвадзе, Г. ... 1980, Tsuji, … 1955).

Canonical product of Blaschke - Djerbashyan (Джербашян М. М., 1945)

$$\mathcal{B}_P\big(z,(a_n)\big) = z^{\lambda}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)^k\right)$$

is particular case of Djerbashyan product (Джербашян М. М., 1948), where $\lambda + 1$ and p natural numbers $|z| < 1$,

$$0 < |a_n| \le |a_{n+1}| < 1, \lim_{n\to\infty}|a_n| = 1,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^P = +\infty, \sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^{P+1} < +\infty$$

Infinite product $\mathcal{B}_P\big(z,(a_n)\big)$ is unifomly and absolutely convergent inside of the open unit disk, and represents analytic function with zeros

$$\underbrace{0,0,\dots 0}_{\lambda}, a_1, a_2, \dots\ a_n \dots$$

Rudin (Rudin, 1955) showed that the

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-|a_n|}{|\ e^{i\theta}-a_n|} < +\infty \qquad (1)$$

is sufficient for the Bliashke product $B\big(z,(a_n)\big)$ to have a finite radial variation at the point $e^{i\theta}$, i.e. the radius passing through the point $e^{i\theta}$ is reflected linearly in the circle. Cargo (Cargo G. T., 1962) discovered that condition (1) is necessary and sufficient for the product $B\big(z,(a_n)\big)$ and all its subsets to have a finite chordal variation at the point $e^{i\theta}$ i.e. The section $[a,\ e^{i\theta}], |a| < 1$ is linearly reflected in the circle.

Ahern and Clark (Ahern & Clark, 1971) proved that

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-|a_n|}{|\ e^{i\theta}-a_n|^{k+1}} < +\infty \qquad (2)$$

is necessary and sufficient condition for the product $B\big(z,(a_n)\big)$ and all its multipliers' k^{th} order derivatives to have a radial limit at the point $e^{i\theta}$. Protas

(Protas, 1972) proved that condition (2) is necessary and sufficient condition for the product $B(z,(a_n))$ and all its multipliers' $k^{t\square}$ order derivatives to have a radial limit at the point $e^{i\theta}$.

Lemma 1. If $0<|a_n|\leq |a_{n+1}|<1$ (n = 1,2, …), $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^{\mathrm{P}}=+\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^{\mathrm{P}}<+\infty$, $\mathrm{P}-$ and $\lambda+1$ are natural numbers, $\mathcal{D}\subset\mathbb{D}$ is open set and $\mathcal{D}\cap\{0,\ a_1,a_2,\dots\}=\emptyset$. Therefore, for every z, $z\in\mathcal{D}$

$$B'_{P+1}(z,(a_n))=B_{P+1}(z,(a_n))\left(\frac{\lambda}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\propto'(z,a_n)\propto^n(z,a_n)}{\propto(z,a_n)-1}\right),$$

where $\propto(z,a_n)=\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a}_n z}$.

Proof: Denote

$$A(z,a_n)=\left(1-\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)^k\right),$$

$$A(z,a_n)=\big(1-\propto(z,a_n)\big)exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\propto^k(z,a_n)\right).$$

Then obviously

$$B_{P+1}(z,(a_n))=z^{\lambda}\prod_{n=1}^{+\infty}A(z,a_n).$$

when $z\in\mathbb{D}$,

$$B'_{P+1}(z,(a_n))=\lambda z^{\lambda-1}\prod_{n=1}^{+\infty}A(z,a_n)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{B_{P+1}(z,(a_n))}{A(z,(a_n))}\cdot A'(z,a_n)=$$

$$B_{P+1}(z,(a_n))\left(\frac{\lambda}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A'(z,a_n)}{A(z,a_n)}\right). \qquad (3)$$

It is obvious, that

$$A'(z,a_n)=-\propto'(z,a_n)exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\propto'(z,a_n)\right)+$$

$$+(1-\propto(z,a_n))exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\propto'(z,a_n)\right)\times\sum_{k=1}^{P}\propto^{k-1}(z,a_n)\propto'(z,a_n).$$

According to equality above

$$A'(z,a_n)=\propto'(z,a_n)exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\propto'(z,a_n)\right)$$

$$\times\left(-1+\sum_{k=1}^{P}\propto^{k-1}(z,a_n)-\sum_{k=1}^{P}\propto^{k}(z,a_n)\right)=$$

$$= -\propto' (z, a_n)\, exp\left(\sum_{k=1}^{P} \frac{1}{k} \propto^k (z, a_n)\right) \cdot \propto^n (z, a_n)$$

$$= \frac{\propto' (z, a_n) \propto^n (z, a_n)}{\propto (z, a_n)} \cdot A(z, a_n).$$

According to the last equality and (3)

$$B'_{P+1}\big(z, (a_n)\big) = B_{P+1}\big(z, (a_n)\big)\left(\frac{\lambda}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\propto' (z, a_n) \propto^n (z, a_n)}{\propto (z, a_n) - 1}\right).$$

This proves the Lemma 1.

Cargo (Cargo G. T., 1963) proved the following:

Lemma 2. If $|a| < 1, b \in \mathbb{C}, \gamma = \frac{b(1-a)}{1-ba}$, then

$$\int_0^1 \frac{dz}{|1 - \gamma z|^2} \leq \frac{\frac{\pi}{2}(1 + |a|)}{sin \frac{\pi(1 + |a|)}{2}} \cdot \frac{|1 - ab|}{1 - b}.$$

Lemma 3. If $z = z(r) = a + (1 - a)r, (a) < 1, 0 \leq r < 1$, then exist such $M > 0$ number, that when $a \neq a_n$ is proved

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \left|\frac{\propto' (z, a_n)}{1 - \propto (z, a_n)}\right| z'(r)\, dr \leq M, (n = 1,2, \dots$$

Proof:

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \left|\frac{\propto' (z, a_n)}{1 - \propto (z, a_n)}\right| |z'(r)| dr = \int_0^1 \left|\frac{\left(\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n} z}\right)'}{1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n} z}}\right| |z'(r)| dr =$$

$$\int_0^1 \left|\frac{\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n} z}}{-\frac{\overline{a_n}(z - a_n)}{1 - \overline{a_n} z}}\right| |1 - a| dr = |1 - a| \int_0^1 \left|\frac{1 - |a_n|^2}{|z - a_n||1 - \overline{a_n} z|}\right| dr$$

E.I.

$$\mathrm{I}_n = \big(1 - |a_n|^2\big)(1 - a) \int_0^1 \left|\frac{z(r) - a_n}{1 - \overline{a_n} z(r)}\right| \cdot \frac{dr}{|z(r) - a_n|^2} \leq$$

$$\leq \big(1 - |a_n|^2\big)(1 - a) \int_0^1 \frac{dr}{|a + (1 - a)r - a_n|^2} =$$

$$= \frac{\big(1 - |a_n|^2\big)(1 - a)}{|a - a_n|^2} \int_0^1 \frac{dr}{\left|1 + \frac{1 - a}{a - a_n} r\right|^2}. \qquad (4)$$

Denote

$$\gamma_n = \frac{1-a}{a-a_n} = \frac{\frac{1}{a_n}(1-a)}{a-\frac{1}{a_n}a} . \qquad (5)$$

From (4) and (5)

$$\mathrm{I}_n \le \frac{(1-|a_n|^2)(1-a)}{|a-a_n|^2}\int_0^1 \frac{dr}{|1+\gamma_n r|^2} .$$

Therefore, according to the Lemma 2

$$\mathrm{I}_n \le \frac{(1-|a_n|^2)(1-a)}{|a-a_n|^2}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}(1+|a|)}{\sin\frac{\pi(1+|a|)}{2}}\cdot\frac{\left|1-\frac{a}{a_n}\right|}{\left|1-\frac{1}{a_n}\right|} \le$$

$$\le \frac{2(1-|a_n|^2)(1-a)}{|a-a_n|^2}\cdot\frac{\pi(1+|a|)}{\sin\frac{\pi(1+|a|)}{2}}\cdot\frac{|a_n-a|}{|a_n-1|}$$

$$\le \frac{2\pi\big|1+|a|\big|}{|a-a_n|\sin\frac{\pi(1+|a|)}{2}} . (6)$$

If we denote $\min\{|a-a_n|\} = b$, then according to (6)

$$\mathrm{I}_n \le b\frac{2\pi\big|1+|a|\big|}{\sin\frac{\pi(1+|a|)}{2}} = M(a)$$

The Lemma 3 is proved.

Theorem: If

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|\ e^{i\theta}-a_n|}\right)^{P+1} < +\infty \qquad (7)$$

Then Blaschke-Djerbahian canonical product has finite cordal variation in $e^{i\theta}$ point.

Proof. Without restricting the generalization, it can be considered that $\theta = 0$. The equation of the section between ს a and $z = 1$ points is

$$z(r) = a + (1-a)r \qquad 0 \le r \le 1$$

In order to prove the Theorem, we need to demonstrate that

$$\int_0^1 |\mathrm{B}'_{P+1}(z(r),(a_n)\,)|\,|z'(r)|dr < +\infty. \qquad (8)$$

According to the (7)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-|a_n|}{|1-a_n|} = 0,$$

Therefore, there is triangle area $\Delta_\varphi(1,z_0) = \{z\colon |z-1| < r_0 - 1,\ 0 < r_0 < 1,$ $z \in \mathbb{C}\} \cap V_\varphi(1)$ of the point $z = 1^\theta$ such, that

$$\Delta_\varphi(1,r_0) \cap \{a_1,a_2,\dots\} = \emptyset \qquad (9)$$

The angle φ can be chosen in such a way that $a \in V_\varphi(1)$ is the Stolz angle, so the section $[a, 1]$ connecting the points a and $z = 1$ [a,1] completely belongs to the angle$V_\varphi(1)$. sObviously, there is point b $\in [a, 1]$, such that $b \in \Delta_\varphi(1, r)$.

$$\int_0^1 |\mathrm{B}'_{P+1}(z(r), (a_n))||z'(r)|dr\, dr = \int_0^{r_0} |\mathrm{B}'_{P+1}(z(r), (a_n))||z'(r)|dr\, dr +$$

$$+ \int_{r_0}^1 |\mathrm{B}'_{P+1}(z(r), (a_n)\,)||z'(r)|dr.$$

In the equation above $\mathrm{B}'_{P+1}(z, (a_n)\,)$ is continuous function in the circle and $z \le r_0$, therefore it is obvious that the first summand is the finite number and in order to prove the Theorem it is sufficient to demonstrate that

$$\int_{r_0}^1 |\mathrm{B}'_{P+1}(z(r), (a_n))|\, dr + \infty. \qquad (10)$$

Because of the Theorem 1 we can choose such φ and r_0, that $B_{P+1}(z, (a_n))$ is continuous function on the triangle area $\overline{\Delta_\varphi(1, r_0)}$. Consequently, it will be limited on this area by the number $M_1 > 0$.

Because of the Lemma 1

$$\mathrm{B}'_{P+1}(z, (a_n)\,) = B_{P+1}(z, (a_n))\left(\frac{\lambda}{r_0} + \frac{\propto'(z, a_n) \propto^n (z, a_n)}{\propto (z, a_n) - 1}\right).$$

Therefore

$$|\mathrm{B}'_{P+1}(z, (a_n))| \le M_1\left(\frac{\lambda}{r_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\propto'(z, a_n) \propto^n (z, a_n)|}{|1 - \propto (z, a_n)|}\right). \qquad (11)$$

The article (Tetvadze, Tetvadze, & Tsibadze, 2021) demonstrated that, for the Theorem's conditions there is N natural number, such that

$$\frac{1 - |a_n|^2}{|1 - \overline{a_n} z|} < q < 1, \qquad z \in \overline{\Delta_\varphi(1, r_0)}, \qquad (12)$$

From (11) and (12), when $z \in \overline{\Delta_\varphi(1, r_0)}$

$$|\mathrm{B}'_{P+1}(z, (a_n))| \le M_1\left(\frac{\lambda}{r_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\propto'(z, a_n) \propto^n (z, a_n)|}{|1 - \propto (z, a_n)|}\right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \frac{|\propto'(z, a_n)|}{|1 - \propto (z, a_n)|}\right). \quad (13)$$

Because of the Lemma 3, exists such $M > 0$ number, that

$$\int_0^1 \frac{|\propto'(z(r), a_n)|}{1 - \propto (z(r), a_n)} dr \le M. \qquad (14)$$

From (13) and (14)

$$\left|B'_{P+1}\left(z(r),(a_n)\right)\right| \le M_1\left(\frac{\lambda}{r_0}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\propto^n\ (z(r),a_n)\propto'\ (z,a_n)|}{|1-\propto\ (z(r),a_n)|}+\sum_{n=1}^{+\infty}q^n\frac{|\propto'\ (z(r),a_n)|}{|1-\propto\ (z(r),a_n)|}\right)\le$$

$$\le M_1\left(\int_{r_0}^{1}\left(\frac{\lambda}{r_0}+\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{\propto^n\ (z(r),a_n)\propto'\ (z,a_n)}{1-\propto\ (z(r),a_n)}\right|+\frac{q^nM}{1-q}\right)\right)<+\infty$$

The Theorem is proved.