მასალათა მექანიკა

უწყვეტი ტანის დეფორმირების ბლანტდრეკადი მიკროპოლარული მოდელი ბრტყელი დეფორმირებული მდგომარეობისათვის

ომარ კიკვიძე
omar.kikvidze@atsu.edu.ge
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო

ნაშრომში განხილულია უწყვეტი ტანის დეფორმირების ბლანტდრეკადი განზოგადებული მოდელი, რომელშიც ტანის შემადგენელი ყოველი მიკრონაწილაკი ასრულებს სპეციფიკურ გადაადგილებებს და ქმნიან ეგრეთწოდებულ მიკროპოლარულ არეს. მიკროპოლარულ არეში გათვალისწინებულია ნაწილაკების ბრუნვითი ურთიერთქმედება და ძაბვების ჩვეულებრივ ველთან ერთად არსებობენ ასევე, ბრუნვით ურთიერთქმედებასთან დაკავშირებული მომენტური ძაბვები. ძაბვები და დეფორმაციები აღიწერებიან არასიმეტრიული ტენზორებით. დრეკადი და ბლანტი ელემენტების პარალელური შეერთების პრინციპის საფუძველზე ჩაწერილია ბლანტდრეკადი მოდელის განმსაზღვრელი განტოლებები. მიღებულია ჩაკეტილ განტოლებათა სისტემა ორგანზომილებიანი ბრტყელი დეფორმირებული მდგომარეობისათვის, ხაზოვანი გადაადგილების და ბრუნვის ვექტორების კომპონენტების მიმართ. ფორმულირებულია საწყისი და სასაზღვრო პირობები.

საკვანძო სიტყვები: *ბლანტდრეკადი, მომენტური ძაბვები, მიკროპოლარული, ძაბვა, დეფორმაცია, დეფორმაციის სიჩქარე.*

ბლანტდრეკადი სხეულების დეფორმაციის მათემატიკური მოდელის შედგენისათვის საკვანძო საკითხია მდგომარეობის განტოლების შერჩევა, რომელიც აღწერს ფიზიკა-მექანიკური თვისებების ცვლილებას დროში - იძულებითიდაბერების(დაძველების)პროცესს,მაგალითადდასხივებისას. დასხივების ინტენსივობაზე დამოკიდებულია მატერიალური ნაწილაკის მდგომარეობის განტოლების პარამეტრები.

უწყვეტი ტანის მოდელის აგება წარმოებს განზოგადებული მათემატიკური მოდელის საფუძველზე, როცა მასალის ნაწილაკი არ განიხილება როგორც მატერიალური წერტილი, არამედ განიხილება,

როგორც უფრო რთული ობიექტი, მინიჭებული თვისებებით, რომლებიც აღწერენ მასალის (ქსოვილის) მიკროსტრუქტურას. ამ მოდელის ფარგლებში ტანის შემადგენელი ყოველი მიკრონაწილაკი ასრულებს ხაზოვან გადაადგილებას, ბრუნავს და ქმნის ეგრეთწოდებულ მიკროპოლარულ არეს. მიკროპოლარულ არეში გათვალისწინებულია ნაწილაკების ბრუნვითი ურთიერთქმედება და ძაბვების ჩვეულებრივ ველთან ერთად არსებობენ, ასევე, ბრუნვით ურთიერთქმედებასთან დაკავშირებული მომენტური ძაბვები.

დრეკადობის, პლასტიკურობის, ცოცვადობის კლასიკური თეორიები ეფუძნებიან გარემოს იდეალიზირებულ მოდელს, რომელშიც დატვირთვის კავშირი ზედაპირის ორივე მხარეს აღიწერება მხოლოდ მთავარი ვექტორით. ამ დაშვებას მივყავართ სიმეტრიულ დაძაულ-დეფორმირებულ მდგომარეობამდე. ეს მოდელი კარგად ეთანადება ექსპერიმენტებს, ჩატარებულს საკონსტრუქციო მასალებზე. მნიშვნელოვანი განსხვავება წარმოიშვება იმ შემთხვევაში, როცა არსებითია ძაბვების გრადიენტი. უთანხმოება თეორიასა და ექსპერიმენტს შორის წარმოიშვება იმ შემთხვევაშიც, როცა შედეგებზე უცილობლად მოქმედებს მასალის მიკროსტრუქტურა. სიმეტრიული თეორია საკმარისი სიზუსტით არ აღწერს მოვლენებს, რომლებსაც ადგილი აქვს მარცვლოვან მასალებში, პოლიკრისტალურ სტრუქტურებში და პოლიმერებში (Новацкий 1975, Еремеев 1999).

სიმეტრიული თეორიის ეს ნაკლი შეიძლება გამოსწორდეს თუ ტანის დეფორმირების მოდელს ავაგებთ დაშვებით, რომ დატვირთვა სხეულის ზედაპირის ელემენტის ორივე მხარეს გადაეცემა არა მარტო მთავარი ვექტორით, ასევე მთავარი მომენტით. ასეთ დაშვებას მივყავართ სხეულის ელემენტის ელემენტარულ მოცულობაში არა მარტო ძაბვების (force-stresses) σ_{ij} , ასევე მომენტური ძაბვების (couple-stresses) μ_{ij} მოქმედებამდე და ზოგადად, σ_{ij} და μ_{ij} ტენზორები არასიმეტრიული ტენზორებია (Новацкий 1975).

არასიმეტრიული დრეკადობის ზოგადი თეორია შემუშავებულ იქნა ძმები კოსერების მიერ. დრეკადობის კლასიკურ თეორიაში მატერიალური ნაწილაკი ემთხვევა წერტილს, ხოლო დეფორმირებული მდგომარეობა აღიწერება წერტილის გადაადგილებით. ამ მოდელისაგან განსხვავებით, კოსერების თეორიაში დეფორმირებული სხეულის ყოველ ნაწილაკს უთანადებენ ორთოგონალურ სამწახნაგს. შესაბამისად, ყოველი ნაწილაკი წარმოადგენს მცირე, აბსოლუტურად მყარ სხეულს. ასეთი

გარემოს დეფორმაცია აღიწერება არა მარტო გადაადგილების u ვექტორით, ასევე ბრუნვის ω ვექტორით. კოში-ჰელმჰოლცის თეორემის თანახმად, გარემოს უსასრულოდ მცირე მარცვლის წერტილების სიჩქარე $\dot{u}_1$ ($\dot{u}_1$ - O_1 წერტილის სიჩქარე) ტოლია გადატანთი მოძრაობის სიჩქარის $\dot{u}_0$ ($\dot{u}_0$ -მარცვლის O ცენტრის სიჩქარე), ნაწილაკის, როგორც აბსოლუტურად ხისტის ბრუნვითი მოძრაობის სიჩქარის $\dot{u}_{\text{ბრ.}} = \dot{\omega}\times\rho$ და სუფთა დეფორმაციის სიჩქარის $\dot{u}_*$ ჯამის: $\dot{u}_1 = \dot{u}_0 + \dot{u}_{\text{ბრ}} + \dot{u}_*$.

განმსაზღვრელი განტოლებები ბლანტდრეკადი გარემოსათვის ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2G\gamma_{(ij)} + 2\alpha\gamma_{<ij>} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij} + 2\eta\dot{\gamma}_{(ij)} + 2\varsigma\dot{\gamma}_{<ij>}, \\ \mu_{ij} &= 2H\kappa_{(ij)} + 2\varepsilon\kappa_{<ij>} + \beta\kappa_{kk}\delta_{ij} + 2\theta\dot{\kappa}_{(ij)} + 2\chi\dot{\kappa}_{<ij>}\end{aligned} \tag{1}$$

სადაც: ( ) - ტენზორის სიმეტრიულ ნაწილია, < > -ტენზორის ანტისიმეტრიული ნაწილია, κ_{ji} – ღუნვა-გრეხის ტენზორია, γ_{ji} – დეფორმაციის არასიმეტრიული ტენზორია, G,λ - ლამეს მუდმივებია, H,ε,β -დრეკადობის ახალი მუდმივებია, $\eta,\varsigma,\theta,\chi$ -სიბლანტის კოეფიციენტებია.

დეფორმაციის არასიმეტრიული ტენზორი γ_{ji} და ღუნვა-გრეხის ტენზორი κ_{ji} განისაზღვრებიან დამოკიდებულებებით:

$$\begin{aligned}\gamma_{ji} &= u_{i,j} - e_{kji}\omega_k, \\ \kappa_{ji} &= \omega_{i,j}\end{aligned} \tag{2}$$

სადაც: u_i - გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებია, ω_i - ბრუნვის ვექტორის კომპონენტებია, e_{ijk} - ლევი-ჩივიტას ტენზორია.

აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ (2) კინემატიკური სისტემა იყოს ინტეგრებადი ცალადბმულ არეში არის თავსებადობის განტოლების შესრულება (Sandru 1966)

$$\begin{aligned}\kappa_{ji,l} &= \kappa_{li,j} \\ \gamma_{li,h} - \gamma_{hi,l} + e_{kih}\kappa_{lk} - e_{kil}\kappa_{hk} &= 0\end{aligned} \tag{3}$$

თავსებადობის პირობები წრფივ მიკროპოლარულ თეორიაში განხილულია ასევე ნაშრომში (Никабадзе 2010).

წონასწორობის განტოლებები სხეულის შიგნით ნებისმიერი V მოცულობისათვის ჩაიწერება შემდეგი სახით (X_i - მოცულობითი ძალებია, Y_i - მოცულობითი მომენტებია) (Новацкий 1975):

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + X_i &= 0, \\ e_{ijk}\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i &= 0\end{aligned} \tag{4}$$

ძაბვის ტენზორი σ_{ij} არასიმეტრიულია. ეს ტენზორი იქნება სიმეტრიული მოცულობითი მომენტების Y_i და მომენტური ძაბვების μ_{ij} უგულვებელყოფის შემთხვევაში. ასეთ შემთხვევაში (4) სისტემის მეორე განტოლება დაიყვანება სახეზე $e_{ijk}\sigma_{jk}=0$, რაც უზრუნველყოფს ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობას $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$.

დინამიკის ამოცანებისათვის, დალამბერის პრინციპის თანახმად, (4) განტოლებებში საჭიროა დაემატოს ინერციული წევრები და მოძრაობის განტოლებები მიიღებენ სახეს (ρ - მასალის სიმკვრივეა, I - ინერციის ზომაა ბრუნვისას) :

$$\sigma_{ij,j}+X_i=\rho\ddot{u}_i,$$

$$e_{ijk}\sigma_{jk}+\mu_{ji,j}+Y_i=I\ddot{\omega}_i$$

წონასწორობის განტოლებებს სხეულის ზედაპირზე აქვთ სახე:

$$\sigma_{ij}n_j=p_i(n),\quad \mu_{ij}n_j=m_i(n) \tag{5}$$

სადაც: n_i არის სხეულის ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ ერთეულოვანი n ვექტორის კომპონენტები. მე (5) თანაფარდობები წარმოადგენენ სტატიკურ სასაზღვრო პირობებს.

(2) და (4) განტოლებებში ზოგადად 24 უცნობია. განმსაზღვრელი (1) განტოლებების გათვალისწინებით ამოცანა დაიყვანება გადაადგილების ვექტორის და ბრუნვის ვექტორის კომპონენტების განსაზღვრაზე.

(1) განმსაზღვრელი განტოლებები ჩაწერილია ბლანტდრეკადი მასალის მექანიკური მოდელის აგების პრინციპზე, როცა დრეკადი და ბლანტი ელემენტები შეერთებულია პარალელურად (ეგრეთწოდებული ფოიხტის სხეული). რადიაციული ველის ხანმოკლე ზემოქმედებისას, რაც იწვევს გარემოს იძულებით დაზერებას დროის მცირე მონაკვეთში, მასალის მახასიათებელი პარამეტრები დამოკიდებულია დასხივების ინტენსივობაზე (q), რომელიც განმსაზღვრელ განტოლებებში შედის სტრუქტურული პარამეტრის სახით. მიკროპოლარული არის დეფორმაციის თეორიის განვითარება დაკავშირებულია ყველა მატერიალური მუდმივას განსაზღვრასთან, რაც მოითხოვს ექსპერიმენტების ჩატარებას (Новацкий 1975). მიკროპოლარული ბლანტდრეკადი გარემოს მახასიათებელი მუდმივების განსაზღვრა ექსპერიმენტალურად შესაძლებელია თუ ხაზოვანი გადაადგილების ელემენტებთან ერთად გავითვალისწინებთ დრეკად და ბლანტ ელემენტებს ბრუნვითი მოძრაობით.

განვიხილოთ ორგანზომილებიანი ამოცანა. დავუშვათ, რომ ხაზოვანი გადაადგილებები და მობრუნებები არ არიან დამოკიდებული x_3

ცვლადზე. მაშინ ბრტყელი დეფორმირებული მდგომარეობა აღიწერება ვექტორებით:

$$u \equiv (u_1, u_2, 0), \quad \omega \equiv (0,0,\omega_3) \tag{6}$$

(2) თანაფარდობებიდან გამომდინარე, ასეთ შემთხვევაში დეფორმირებული მდგომარეობა ხასიათდება სიდიდეებით:

$$\gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3, \gamma_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3,$$
$$\kappa_{13} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}, \kappa_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \tag{7}$$

(7) განტოლებებიდან გამომდინარეობს გეომეტრიული თავსებადობის პირობები ორგანზომილებიანი დეფორმირებული მდგომარეობისათვის:

$$\frac{\partial \gamma_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial x_2} = \kappa_{13}, \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_2} = \kappa_{23}, \frac{\partial \kappa_{23}}{\partial x_1} = \frac{\partial \kappa_{13}}{\partial x_2} \tag{8}$$

ან

$$\frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial(\gamma_{12} + \gamma_{21})}{\partial x_1 \partial x_2},$$
$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{21}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 (\gamma_{22} - \gamma_{11})}{\partial x_1 \partial x_2} - (\frac{\partial \kappa_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \kappa_{23}}{\partial x_2}) \tag{9}$$

ძაბვის ტენზორი ხასიათდება შემდეგი მატრიცებით:

$$\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Vmatrix}, \qquad \mu = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{Vmatrix} \tag{10}$$

ამასთან, არაკუმშვადი მასალისათვის ($\gamma_{kk} = \gamma_{11} + \gamma_{22} = 0$) ძაბვის ტენზორის და მომენტური ძაბვების კომპონენტებისათვის გვაქვს:

$$\sigma_{11} = 2G\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 2\eta\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1}, \sigma_{22} = 2G\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + 2\eta\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_2},$$
$$\sigma_{12} = (G+\alpha)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - 2\alpha\omega_3 + (G-\alpha)\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + (\eta+\varsigma)\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_1} - 2\varsigma\dot{\omega}_3 + (\eta-\varsigma)\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_2},$$
$$\sigma_{21} = (G+\alpha)\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + 2\alpha\omega_3 + (G-\alpha)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + (\eta+\varsigma)\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_2} + 2\varsigma\dot{\omega}_3 + (\eta-\varsigma)\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_1},$$
$$\mu_{31} = (H-\varepsilon)\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} + (\theta-\chi)\frac{\partial \dot{\omega}_3}{\partial x_1}, \quad \mu_{32} = (H-\varepsilon)\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} + (\theta-\chi)\frac{\partial \dot{\omega}_3}{\partial x_2} \tag{11}$$

(4) განტოლებებიდან გამომდინარე, ბრტყელი დეფორმირებული მდგომარეობისათვის გვაქვს წონასწორობის შემდეგი სამი განტოლება (მოცულობით ძალებს და მომენტებს არ ვითვალისწინებთ):

$$\sigma_{12}-\sigma_{21}+\frac{\partial\mu_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial x_2}=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}=0, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}=0$$

თუ ჩავსვამთ (11) თანაფარდობებს (12) განტოლებებში, მივიღებთ წონასწორობის განტოლებებს გადაადგილების და ბრუნვის ვექტორების კომპონენტების მიმართ:

$$2\alpha\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-2\alpha\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-4\alpha\omega_3-4\varsigma\dot{\omega}_3+2\varsigma\frac{\partial\dot{u}_2}{\partial x_1}-2\varsigma\frac{\partial\dot{u}_1}{\partial x_2}+(H-\varepsilon)(\frac{\partial^2\omega_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\omega_3}{\partial x_2^2})+$$
$$+(\theta-\chi)(\frac{\partial^2\dot{\omega}_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\dot{\omega}_3}{\partial x_2^2})=0,$$
$$2G\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+2\eta\frac{\partial^2\dot{u}_1}{\partial x_1^2}+(G+\alpha)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}+(G-\alpha)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}-2\alpha\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}+(\eta+\varsigma)\frac{\partial^2\dot{u}_2}{\partial x_1\partial x_2}+ \qquad (13)$$
$$+(\eta-\varsigma)\frac{\partial^2\dot{u}_1}{\partial x_2^2}-2\varsigma\frac{\partial\dot{\omega}_3}{\partial x_2}=0,$$
$$(G+\alpha)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+(G-\alpha)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+2\alpha\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1}+(\eta+\varsigma)\frac{\partial^2\dot{u}_1}{\partial x_1\partial x_2}+2\varsigma\frac{\partial\dot{\omega}_3}{\partial x_1}+(\eta-\varsigma)\frac{\partial^2\dot{u}_2}{\partial x_1^2}+$$
$$+2G\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+2\eta\frac{\partial^2\dot{u}_2}{\partial x_2^2}=0$$

(13) დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრირებისათვის საჭიროა სასაზღვრო პირობები, ჩაწერილი გადაადგილების და ბრუნვის ვექტორების კომპონენტებისათვის:

$$u_i(x_1,x_2,t)=f_i(x_1,x_2,t),\quad \omega_3(x_1,x_2,t)=g(x_1,x_2,t),$$
$$x_1,x_2\in A, i=1{,}2\quad t>0. \qquad (14)$$

სადაც: A უწყვეტი ტანის შემომსაზღვრელი ზედაპირია. საწყისი პირობები შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$u_i(x_1,x_2,0)=l_i(x_1,x_2),\quad \dot{u}_i(x_1,x_2,0)=k_i(x_1,x_2),\quad i=1{,}2$$
$$\omega_3(x_1,x_2,0)=s(x_1,x_2),\quad \dot{\omega}_3(x_1,x_2)=d(x_1,x_2),\quad x_1,x_2\in V,\quad t=0 \qquad (15)$$

სადაც: l_i,k_i,s,d - მოცემული ფუნქციებია, V - ერთეულოვანი სისქის უწყვეტი ტანის ფართია.

(13) დიფერენციალური განტოლებები საწყისი და სასაზღვრო პირობებით ეფექტურად ამოიხსნება რიცხვითი მეთოდით.

ლიტერატურა

Sandru, N. 1966. „On Some Problems of the Linear Theory of the Asymmetric Elasticity“ // *Int.J.Eng.Sci.*, 4, №1. 1966.

Еремеев, В. А., Зубов, Л.М. 1999. „Теория упругих и вязкоупругих микрополярных жидкостей“ //*ПММ.* 1999, т.63. Вып.5, 1999: 801-815.

Новацкий, В. 1975. *Теория упругости* (Перевод с польского). М.: Изд.-во Мир.

Никабадзе, М.У. 2010. „К условиям совместности в линейной микрополярной теории“ //*Вестн. Моск. ун-та.* Сер. 1. Матем. Механ. №5. 2010: 48–51.

სტატია იბეჭდება შოთა რუსთაველის საქართველოს ეროვნული სამეცნიერო ფონდის გრანტის ფარგლებში (FR-21-3926).

Mechanics of Materials

A Viscoelastic Micropolar Model of Continuous Body Deformation for a Plane Strain State

Omar Kikvidze
omar.kikvidze@atsu.edu.ge
Akaki Tseretely State University
Kutaisi, Georgia

The paper considers the viscoelastic generalized model of a continuous body deformation, in which each microparticle of the body performs the certain movements and creates the so-called micropolar area. In the micropolar region, the rotational interaction of particles is envisaged, and along with a normal stress field, there are also couple stresses related to the rotational interaction. Stresses and strains are described by non-symmetric tensors. Based on the principle of parallel connection of elastic and viscous elements, the indicial equations of the viscoelastic model are written. A system of closed equations for the two-dimensional plane strain state with respect to the components of the linear displacement and rotation vectors has been obtained. Initial and boundary conditions are formulated.

Keywords: *viscoelastic, couple-stresses, micropolar, stress, strain, strain rate.*

Building a model of continuous body is carried out based on a generalized mathematical model, when a particle of the material is not seen as a material point, but as a more complex object with given properties that describes the microstructure of the material (fabric). Within this model, each microparticle of the body performs a linear movement, rotates and creates the so-called micropolar medium. The micropolar medium provides rotational interaction of particles, and along with a normal stress field, there are also the couple-stresses related to the rotational interaction.

Classical theories of elasticity, plasticity, creep are based on an idealized model of medium, in which the relationship of load on both sides of the surface is described only by the main vector. This assumption leads us to a symmetric stress-strain state. This model corresponds well to the experiments conducted on structural materials. A significant difference emerges when the stress gradient is significant. Disagreement between theory and experiment also occurs when the results are inevitably influenced by the microstructure of the material. The symmetric theory does not provide a sufficiently precise description of the phenomena that occur in granular materials, polycrystalline structures and polymers (Новацкий 1975, Еремеев 1999).

This weakness of the symmetry theory can be corrected if we build a body deformation model assuming that the load is transmitted to both sides of the body surface element not only by the main vector but also by the main moment. Such an assumption leads to the action of not only force-stresses σ_{ij}, but also the couple-stresses μ_{ij} in the elementary volume of the body element, and in general, tensors σ_{ij} and μ_{ij} are asymmetric tensors (Новацкий 1975).

In the classical theory of elasticity, a material particle coincides with a point, and the strain state is described by the displacement of a point. In contrast to this model, in Cosserat theory, each particle of the deformed body is aligned with an orthogonal trihedral. Therefore, each particle is a small, absolutely solid body. The deformation of such a medium is described not only by displacement vector u, but also by rotation vector ω.

The constitutive equations for a viscoelastic medium are written as follows:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2G\gamma_{(ij)} + 2\alpha\gamma_{<ij>} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij} + 2\eta\dot{\gamma}_{(ij)} + 2\varsigma\dot{\gamma}_{<ij>},\\ \mu_{ij} &= 2H\kappa_{(ij)} + 2\varepsilon\kappa_{<ij>} + \beta\kappa_{kk}\delta_{ij} + 2\theta\dot{\kappa}_{(ij)} + 2\chi\dot{\kappa}_{<ij>}\end{aligned} \quad (1)$$

where: ( ) - is a symmetric part of the tensor, < > - asymmetric part of the tensor, κ_{ji} – bending-torsion tensor, γ_{ji} – skew-symmetric strain tensor, G, λ - Lame's constants, H, ε, β - the new elasticity constants, $\eta, \varsigma, \theta, \chi$ - coefficients of viscosity.

The skew-symmetric strain tesnsor γ_{ji} and the bending-torsion tensor κ_{ji} are determined as follows:

$$\begin{aligned}\gamma_{ji} &= u_{i,j} - e_{kji}\omega_k,\\ \kappa_{ji} &= \omega_{i,j}\end{aligned} \quad (2)$$

where: u_i - displacement vector components, ω_i - rotation vector components, e_{ijk} - Levi-Civita tensor.

Let us consider a two-dimensional problem. Assume that linear displacements and rotations are independent of a variable. Then the plane strain state is described by vectors:

$$u \equiv (u_1, u_2, 0), \quad \omega \equiv (0, 0, \omega_3) \quad (6)$$

Based on the relationships (2), the strain state in such a case is characterized by the values as follows:

$$\begin{aligned}&\gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3, \gamma_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3,\\ &\kappa_{13} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}, \kappa_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}\end{aligned} \quad (7)$$

The geometric compatibility conditions are derived from the equations (7).

The stress tensor is characterized by the following matrices:

$$\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Vmatrix}, \quad \mu = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{Vmatrix} \quad (10)$$

In addition, for the incompressible material ($\gamma_{kk} = \gamma_{11} + \gamma_{22} = 0$), for the stress tensor and couple-stresses components, we obtain:

$$\sigma_{11} = 2G\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 2\eta\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1},\ \sigma_{22} = 2G\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + 2\eta\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_2},$$

$$\sigma_{12} = (G+\alpha)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - 2\alpha\omega_3 + (G-\alpha)\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + (\eta+\varsigma)\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_1} - 2\varsigma\dot{\omega}_3 + (\eta-\varsigma)\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_2}, \tag{11}$$

$$\sigma_{21} = (G+\alpha)\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + 2\alpha\omega_3 + (G-\alpha)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + (\eta+\varsigma)\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_2} + 2\varsigma\dot{\omega}_3 + (\eta-\varsigma)\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_1},$$

$$\mu_{31} = (H-\varepsilon)\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} + (\theta-\chi)\frac{\partial \dot{\omega}_3}{\partial x_1},\quad \mu_{32} = (H-\varepsilon)\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} + (\theta-\chi)\frac{\partial \dot{\omega}_3}{\partial x_2}$$

Based on the equations (4), we have the following three equilibrium equations for the plane strain state (volumetric forces and moments are neglected):

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} + \frac{\partial \mu_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

If we insert the relationships (11) into equations (12), we obtain the equilibrium equations for the components of displacement and rotation vectors:

$$2\alpha\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - 2\alpha\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - 4\alpha\omega_3 - 4\varsigma\dot{\omega}_3 + 2\varsigma\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_1} - 2\varsigma\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_2} + (H-\varepsilon)(\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x_2^2}) +$$

$$+(\theta-\chi)(\frac{\partial^2 \dot{\omega}_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \dot{\omega}_3}{\partial x_2^2}) = 0,$$

$$2G\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + 2\eta\frac{\partial^2 \dot{u}_1}{\partial x_1^2} + (G+\alpha)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (G-\alpha)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - 2\alpha\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} + (\eta+\varsigma)\frac{\partial^2 \dot{u}_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \tag{13}$$

$$+(\eta-\varsigma)\frac{\partial^2 \dot{u}_1}{\partial x_2^2} - 2\varsigma\frac{\partial \dot{\omega}_3}{\partial x_2} = 0,$$

$$(G+\alpha)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + (G-\alpha)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + 2\alpha\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} + (\eta+\varsigma)\frac{\partial^2 \dot{u}_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\varsigma\frac{\partial \dot{\omega}_3}{\partial x_1} + (\eta-\varsigma)\frac{\partial^2 \dot{u}_2}{\partial x_1^2} +$$

$$+2G\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + 2\eta\frac{\partial^2 \dot{u}_2}{\partial x_2^2} = 0$$

To integrate the differential equations (13), boundary conditions are required for the components of the recorded displacement and rotation vectors:

$$u_i(x_1,x_2,t) = f_i(x_1,x_2,t),\quad \omega_3(x_1,x_2,t) = g(x_1,x_2,t),$$
$$x_1,x_2 \in A, i=1,2\quad t>0. \tag{14}$$

where A is a boundary surface continuous body.

The initial conditions can be represented as follows:

$$\begin{aligned} &u_i(x_1,x_2,0)=l_i(x_1,x_2), \quad \dot{u}_i(x_1,x_2,0)=k_i(x_1,x_2), \quad i=1,2 \\ &\omega_3(x_1,x_2,0)=s(x_1,x_2), \quad \dot{\omega}_3(x_1,x_2)=d(x_1,x_2), \quad x_1,x_2\in V, \quad t=0 \end{aligned} \tag{15}$$

where l_i, k_i, s, d - given functions, V - the area of the unit thickness continuous body.

The differential equations (13) with initial and boundary conditions are efficiently solved by numerical method.

The article is published within the framework of the grant of Shota Rustaveli National Science Foundation of Georgia (FR-21-3926)