

მათემატიკური ფიზიკა

დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის ერთი სასაზღვრო ამოცანის
ეფექტურად ამოხსნა ნახევარსიბრტყეში

კოსტა სვანაძე

აპაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო
Kostasvanadze@yahoo.com

ნაშრომში დრეკად ნარევთა წრფივი თეორიის სტატიკის ერთგვაროვანი განტოლებისათვის ნახევარი სიბრტყის შემთხვევაში ეფექტურადაა ამოხსნილი სასაზღვრო ამოცანა, როცა არის საზღვარზე მოცემული გადაადგილების ვექტორის პირველი და მესამე კომპონენტის ჯამი, მეორე და მეოთხე კომპონენტის სხვაობა, მეორე და მეოთხე კომპონენტის ჯამის ნორმალთ წარმოებული და ბრუნვის ვექტორი. ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება ნახევარ სიბრტყეში პუასონის განტოლებისათვის დირიხლესა და ნეიმანის ამოცანების ამოხსნაზე.

საკვანძო სიტყვები: დრეკად ნარევთა წრფივი თეორია, დირიხლეს და ნეიმანის ამოცანები, ლაპლასის და პუასონის განტოლებები.

1⁰.დრეკადნარევთაწრფივი თეორიის სტატიკის ერთგვაროვან განტოლებას ორი განზომილების შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე (Bashaleishvili, Svanadze 2001, 427-446)

$$\begin{aligned} a_1 \Delta u' + b_1 \operatorname{grad} \operatorname{div} u' + c \Delta u'' + d \operatorname{grad} \operatorname{div} u'' &= 0, \\ c \Delta u' + d \operatorname{grad} \operatorname{div} u' + a_2 \Delta u'' + b_2 \operatorname{grad} \operatorname{div} u'' &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

სადაც $u' = (u_1, u_2)^T$ და $u'' = (u_3, u_4)^T$ კერძო გადაადგილებებია,

$$a_1 = \mu_1 - \lambda_5, \quad a_2 = \mu_2 - \lambda_5, \quad c = \mu_3 + \lambda_5, \quad b_1 = \mu_1 + \lambda_1 + \lambda_5 - \alpha_2 \rho_2 / \rho,$$

$$b_2 = \mu_2 + \lambda_2 + \lambda_5 + \alpha_2 \rho_1 / \rho, \quad \alpha_2 = \lambda_3 - \lambda_4, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2.$$

$$d = \mu_3 + \lambda_3 - \lambda_5 - \alpha_2 \rho_1 / \rho \equiv \mu_3 + \lambda_4 - \lambda_5 + \alpha_2 \rho_2 / \rho.$$

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \lambda_p, p = \overline{1, 5}$, დრეკადი მუდმივებია, ρ_1 და ρ_2 მუდმივებს აქვთ სიმკვრივის განზომილება. აღნიშნული მუდმივები აკმაყოფილებენ კონკრეტულ პირობებს (Bashaleishvili 1995, 59-105).

$$\Delta u' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \theta' + \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \omega'; \quad \Delta u'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \theta'' + \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \omega''$$

იგევეობის გამოყენებით, სადაც

$$\theta' = \operatorname{div} u' = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \theta'' = \operatorname{div} u'' = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_4}{\partial x_2},$$

$$\omega' = \operatorname{rot} u' = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \omega'' = \operatorname{rot} u'' = \frac{\partial u_4}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2},$$

(1) ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$a\Delta u' + c_0\Delta u'' - b_1 \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \omega' - d \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \omega'' = 0, \quad (2)$$

$$C_0\Delta u' + b\Delta u'' - d \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \omega' - b_2 \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \omega'' = 0,$$

სადაც $a = a_1 + b_1$, $b = a_2 + b_2$, $c_0 = c + d$.

(2)-დან ელემენტარული გამოთვლებით მივიღებთ:

$$\Delta u' = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \left(\frac{bb_1 - c_0d}{d_1} \omega' + \frac{bd - c_0b_2}{d_1} \omega'' \right),$$

$$\Delta u'' = \begin{bmatrix} h_3(x) \\ h_4(x) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \left(\frac{ad - c_0b_1}{d_1} \omega' + \frac{ab_2 - c_0d}{d_1} \omega'' \right), \quad (3)$$

სადაც $d_1 = ab - c_0^2$.

ვთქვათ D^+ არის ზედა ნახევარი სიბრტყე ($x_2 > 0$) ხოლო L ox_1 ნამდვილი ღერძი. ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T \in C^3(D^+) \cap C^1(\overline{D^+} \cup L)$ კლასის ვექტორ-ფუნქციაა, ამასთან $u_k = O(1)$, $|x|^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = O(1)$, $k = \overline{1, 4}$, $j = 1, 2$, $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$.

კ. სვანაძე

მოცემულ შემთხვევაში (3)-დან მივიღებთ

$$\Delta \omega = 0, \quad \omega = (\omega', \omega'')^T, \quad x \in D^+, \quad (4)$$

$$TU = M_1 \frac{\partial U}{\partial n(x)} + M_2 \frac{\partial U}{\partial S(x)} + M_3 U \quad (5)$$

არის ძაბვის ვექტორი, სადაც (Bashaleishvili 1995, 59-105)

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & c_0 & 0 \\ 0 & a & 0 & c_0 \\ c_0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & b \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & a-2\mu_1 & 0 & c_0-2\mu_3 \\ 2\mu_1-a & 0 & 2\mu_3-c_0 & 0 \\ 0 & c_0-2\mu_3 & 0 & b-2\mu_2 \\ 2\mu_3-c_0 & 0 & 2\mu_2-b & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} -b_1 n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & b_1 n_2 \frac{\partial}{\partial x_1} & -dn_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & dn_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ b_1 n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} & -b_1 n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} & dn_1 \frac{\partial}{\partial x_2} & -dn_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ -dn_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & dn_2 \frac{\partial}{\partial x_1} & -b_2 n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & b_2 n_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ dn_1 \frac{\partial}{\partial x_2} & -dn_1 \frac{\partial}{\partial x_1} & b_2 n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} & -b_2 n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial}{\partial n(x)} = n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial s(x)} = n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - n_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad n = (n_1, n_2)^T$$

ერთეულოვანი ვექტორია, D^+ არეს შემთხვევაში $n = (0, -1)^T$.

დასასრულ, შევნიშნოთ, რომ თუ $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ (1) განტოლებათა სისტემის რეგულარული ამონახსნია D^+ არეში, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს (Bashaleishvili 1995, 59-1051)

$$\int_L TU(y)|_{y_2=0} dy_1 = 0$$

$$\int_{D^+} H(x) dx = \int_L \frac{\partial U(y)}{\partial n(y)}|_{y_2=0} dy_1, \quad (6)$$

სადაც $H = (h_1, h_2, h_3, h_4)^T$.

2⁰. შრომაში განიხილება შემდეგი ამოცანა: D^+ არეში ვიპოვოთ (1) ანუ (2) განტოლებათა სისტემის ისეთი რეგულარული $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\begin{aligned} (u_1 + u_3)|_L &= f_1(x_1), & x_1 \in L, \\ (u_2 - u_4)|_L &= f_2(x_1), & x_1 \in L, \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(u_2 + u_4)|_L &= f_3(x_1), & x_1 \in L, \\ \omega|_L &= \begin{pmatrix} \omega' \\ \omega'' \end{pmatrix}|_L = \begin{pmatrix} f_4(x_1) \\ f_5(x_1) \end{pmatrix} & x_1 \in L, \end{aligned} \quad (7)$$

სადაც f_1, f_2, f_2', f_3, f_4 და f_5 ნამდვილი L -ზე მოცემული უწყვეტი შემოსაზღვრული ფუნქციებია, ამასთან აკმაყოფილებენ კონკრეტულ პირობებს და ტოლობებს (იხ. 21).

აღნიშნული ამოცანისათვის ერთადერთობის თეორემის დამტკიცებისა და ამონახსნის პოვნის მიზნით მოვახდინოთ (7) სასაზღვრო პირობების შეცვლა ექვივალენტური სასაზღვრო პირობებით.

ერთის მხრივ,

$$\begin{aligned} (u_2 - u_4)|_L &= f_2(x_1), & \omega'|_L &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)|_L = f_4(x_1), \\ \omega''|_L &= \left(\frac{\partial u_4}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)|_L = f_5(x_1) \end{aligned}$$

სასაზღვრო პირობების საფუძველზე ელემენტარული გამოთვლების შედეგად დავწერთ:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(u_1 - u_3)|_L = f_2'(x_1) + f_5(x_1) - f_4(x_1) \quad (8)$$

მეორე მხრივ, (8)-ს თანახმად, მარტივად დავასკვნით, რომ (7) სასაზღვრო პირობების ექვივალენტური სასაზღვრო პირობებია:

$$\begin{aligned} (u_1(x) + u_3(x))|_L &= f_1(x_1), & x_1 \in L, \\ \frac{\partial (u_1(x) - u_3(x))}{\partial x_2}|_L &= f_2'(x_1) + f_5(x_1) - f_4(x_1) = F(x_1), & x_1 \in L, \\ (u_2(x) - u_4(x))|_L &= f_2(x_1), & x_1 \in L, \\ \frac{\partial (u_2(x) + u_4(x))}{\partial x_2}|_L &= f_3(x_1), & x_1 \in L, \end{aligned} \quad (9)$$

კ. სეანაძე

$$\omega'(x)|_L = \left(\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} \right) \Big|_L = f_4(x_1), \quad x_1 \in L,$$

$$\omega''(x)|_L = \left(\frac{\partial u_4}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \Big|_L = f_5(x_1), \quad x_1 \in L.$$

ადგილი აქვს ერთადერთობის შემდეგ თორემას.

თეორემა 2⁰. (2), (7) სასაზღვრო ამოცანის შესაბამისი ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$U_0(x) = (\beta, \gamma, -\beta, \gamma)^T,$$

სადაც β და γ ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია.

დამტკიცება, რადგან ერთგვაროვანი ამოცანის

$$\Delta \omega_0(x) = 0, \quad x \in D^+, \quad \omega_0(x)|_L = 0$$

ზოგადი ამონახსნია $\omega_0 = (\omega'_0, \omega''_0)^T = 0$ ამიტომ (3) და (4) ფორმულების

საფუძველზე აღნიშნული ერთგვაროვანი ამოცანა დაიყვანება D^+ არეში შემდეგი ერთგვაროვანი ამოცანების

$$\Delta(u_{01}(x) + u_{03}(x)) = 0, \quad x \in D^+, \quad (u_{01}(x) + u_{03}(x))|_L = 0, \quad (10)$$

$$\Delta(u_{01}(x) - u_{03}(x)) = 0, \quad x \in D^+, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}(u_{01}(x) - u_{03}(x))|_L = 0, \quad (11)$$

$$\Delta(u_{02}(x) - u_{04}(x)) = 0, \quad x \in D^+, \quad (u_{02}(x) - u_{04}(x))|_L = 0, \quad (12)$$

$$\Delta(u_{02}(x) + u_{04}(x)) = 0, \quad x \in D^+, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}(u_{02}(x) + u_{04}(x))|_L = 0, \quad (13)$$

ამოხსნაზე.

მეორე მხრივ, რადგან (10) და (12) ამოცანების ნულოვანი ამონახსნი აქვს, ხოლო (11) და (13) ამოცანების ამონახსნები ნებისმიერი მუდმივებია, ამიტომ მარტივად დავასკვნით, რომ სამართლიანია თეორემა 2⁰.

3⁰. (2), (9) ამოცანის ამოხსნა. აღნიშნული ამოცანის ამოხსნის მიზნით განვიხილოთ დირიხლეს ამოცანა

$$\Delta \omega(x) = \Delta(\omega'(x), \omega''(x))^T = 0, \quad (\omega'(x), \omega''(x))^T|_L = (f_4(x_1), f_5(x_1))^T$$

და შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული ამოცანის ერთადერთი ამონახსნია

$$\omega(x) = \begin{pmatrix} \omega'(x) \\ \omega''(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} f_4(y_1) \\ f_5(y_1) \end{pmatrix} dy_1. \quad (14)$$

ახლა (14)-დან განსაზღვრული $\omega'(x)$ და $\omega''(x)$ ფუნქციებს, თუ გავითვალისწინებთ (3) და (4) ფორმულების მარჯვენა მხარეში, მაშინ

მივიღებთ $C'(D^+) \cap C(\overline{D^+} \cup L)$ კლასის ცნობილი ვექტორ-ფუნქციას $H = (h_1, h_2, h_3, h_4)^T$.

ამრიგად, მიღებული შედეგის საფუძველზე (იხ. (3) (4) და (9)) მარტივად დავასკვნით, რომ (2) ამოცანა დაიყვანება D^+ არეში პუასონის განტოლებისათვის დირიხლესა და ნეიმანის შემდეგ ამოცანებზე:

$$\begin{aligned} \Delta[u_1(x) + u_3(x)] &= h_1(x) + h_3(x), \quad x \in D^+, \\ [u_1(x) + u_3(x)]|_L &= f_1(x_1), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta[u_2(x) - u_4(x)] &= h_2(x) - h_4(x), \quad x \in D^+, \\ [u_2(x) - u_4(x)]|_L &= f_2(x_1), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta[u_1(x) - u_3(x)] &= h_1(x) - h_3(x), \quad x \in D^+, \\ \frac{\partial}{\partial x_2}[u_1(x) - u_3(x)]|_L &= F(x_1), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Delta[u_2(x) + u_4(x)] &= h_2(x) + h_4(x), \quad x \in D^+, \\ \frac{\partial}{\partial x_2}[u_2(x) + u_4(x)]|_L &= f_3(x_1), \end{aligned} \quad (18)$$

დირიხლეს (15) და (16) ამოცანების ერთადერთი ამონახსნი შესაბამისად მოიცემა შემდეგი ფორმულებით

$$u_1(x) + u_3(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{D^+} G(x, y) [h_1(y) + h_3(y)] dy + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_2 f_1(y_1) dy_1}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2}, \quad (19)$$

$$u_2(x) - u_4(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{D^+} G(x, y) [h_2(y) - h_4(y)] dy + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_2 f_2(y_1) dy_1}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} \quad (20)$$

სადაც $G(x, y)$ D^+ არეში ლაპლასის განტოლების შემთხვევაში დირიხლეს ამოცანის შესაბამისი გრინის ფუნქციაა (დობორჯგინიძე, შათაშვილი 1982)

$$G(x, y) = \ln \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} - \ln \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2}$$

ახლა შევნიშნოთ რომ (6)-ს მეორე ტოლობის თანახმად ნეიმანის (17) და (18) ამოცანების ამოხსნადობის აუცილებელი პირობები (Владимиров, 1988).

კ. სვანაძე

$$\int_{D^+} [h_1(y) - h_3(y)] dy - \int_{-\infty}^{\infty} F(y_1) dy_1 = 0, \quad (21)$$

$$\int_{D^+} [h_2(y) + h_4(y)] dy - \int_{-\infty}^{\infty} f_3(y_1) dy_1 = 0,$$

შესრულებულია და მათი ამონახსნები შესაბამისად მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$u_1(x) - u_3(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{D^+} G_{(1)}(x, y) [h_1(y) - h_3(y)] dy + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} F(y_1) dy_1, \quad (22)$$

$$u_2(x) + u_4(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{D^+} G_{(1)}(x, y) [h_2(y) + h_4(y)] dy + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} f_3(y_1) dy_1, \quad (23)$$

სადაც $G_{(1)}(x, y)$ D^+ არეში ლაპლასის განტოლების შემთხვევაში ნეიმანის ამოცანის შესაბამისი გრინის ფუნქციაა [დობორჯგინიძე, შათაშვილი 1982]

$$G_{(1)}(x, y) = \ln \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} + \ln \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2}.$$

დასასრულს (19), (22) და (20), (23) ფორმულების საშუალებით ვიპოვიტ განსახილველი ამოცანის ამონახსნს კვადრატუმებში.

ლიტერატურა

დობორჯგინიძე ლ., შათაშვილი ს. 1982. *მათემატიკური ფიზიკის განტოლებათა ძირითადი საკითხები*, თბილისი.

Basheleishvili, M., Basheleishvili O. 1995. *Two-dimensional boundary value problems of statics of the theory of elastic mixtures*. Mem. Differential Equations Math. Phys. 6, 1995: 59-105.

Basheleishvili M. and Svanadze K. 2001. *A new method of solving the basic plane boundary value problems of statics of the elastic mixture theory*. Georgian Mathematical Journal vol. 8, 2001: 3, 427-446.

Владимиров В.С. 1988. *Уравнения математической физики*.

Mathematical Physics

Effective solution of a boundary value problem of statics of the theory of elastic mixture in a half-plane

Kosta Svanadze

Akaki Tsereteli State University

Kutaisi, Georgia

Kostasvanadze@yahoo.com

In the paper we consider effective solution of the boundary value problem for homogeneous equation of statics of the linear theory of elastic mixture in a half-plane, when on the boundary are given the sum of the I and III components, the difference of II and IV components the normal derivative of the sum of II and IV components of displacement vector and rotor vector. The problem can be reduced in same domain to the of Dirichlet and Neumann problems for equation of the Poisson.

Keywords: Linear theory of elastic mixture, Dirichlet and Neumann problems, Laplace and Poisson equation.

1⁰. In the two-dimensional case the basic homogeneous equations of statics of the elastic mixture theory have the form (Bashaleishvili, Svanadze 2001)

$$\begin{aligned} a_1 \Delta u' + b_1 \operatorname{grad} \operatorname{div} u' + c \Delta u'' + d \operatorname{grad} \operatorname{div} u'' &= 0, \\ c \Delta u' + d \operatorname{grad} \operatorname{div} u' + a_2 \Delta u'' + b_2 \operatorname{grad} \operatorname{div} u'' &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

where $u' = (u_1, u_2)^T$ and $u'' = (u_3, u_4)^T$ are partial displacements,

$$a_1 = \mu_1 - \lambda_5, \quad a_2 = \mu_2 - \lambda_5, \quad c = \mu_3 + \lambda_5, \quad b_1 = \mu_1 + \lambda_1 + \lambda_5 - \alpha_2 \rho_2 / \rho,$$

$$b_2 = \mu_2 + \lambda_2 + \lambda_5 + \alpha_2 \rho_1 / \rho, \quad \alpha_2 = \lambda_3 - \lambda_4, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2.$$

$$d = \mu_3 + \lambda_3 - \lambda_5 - \alpha_2 \rho_1 / \rho \equiv \mu_3 + \lambda_4 - \lambda_5 + \alpha_2 \rho_2 / \rho.$$

Here $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \lambda_p, p = \overline{1, 5}$, are elastic constants ρ_1 and ρ_2 are partial densities. The above constants satisfying the definite conditions (Bashaleishvili 1995, 59-105).

Using the identity:

$$\begin{aligned} \Delta u' &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \theta' + \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \omega'; & \Delta u'' &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \theta'' + \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \omega'', \\ \theta' = \operatorname{div} u' &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \theta'' = \operatorname{div} u'' &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_4}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

3. სვანობა

$$\omega' = \text{rot} u' = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \omega'' = \text{rot} u'' = \frac{\partial u_4}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2},$$

we can rewrite (1) as follows:

$$\begin{aligned} a\Delta u' + c_0\Delta u'' - b_1 \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \omega' - d \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \omega'' &= 0, \\ c_0\Delta u' + b\Delta u'' - d \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \omega' - b_2 \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \omega'' &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

where $a = a_1 + b_1$, $b = a_2 + b_2$, $c_0 = c + d$.

From (2) elementary calculations yield:

$$\begin{aligned} \Delta u' = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \left(\frac{bb_1 - c_0d}{d_1} \omega' + \frac{bd - c_0b_2}{d_1} \omega'' \right), \\ \Delta u'' = \begin{bmatrix} h_3(x) \\ h_4(x) \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \left(\frac{ad - c_0b_1}{d_1} \omega' + \frac{ab_2 - c_0d}{d_1} \omega'' \right), \end{aligned} \quad (3)$$

where $d_1 = ab - c_0^2$.

Let D^+ denoted the upper half-plane ($x_2 > 0$). Clearly the boundary D^+ is ox_1 axis $L =]-\infty; +\infty[$.

In what follows we assume that $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T \in C^3(D^+) \cap C^2(\overline{D^+} \cup L)$. Further $u_k = O(1)$, $|x|^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = O(1)$,

$k = \overline{1, 4}$, $j = 1, 2$, $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Finally we can say that from (1) we'll have

$$\Delta \omega = 0, \quad \omega = (\omega', \omega'')^T, \quad x \in D^+. \quad (4)$$

By TU we denote the a stress vector (Basheleishvili 1995, 59-105)

$$TU = M_1 \frac{\partial U}{\partial n(x)} + M_2 \frac{\partial U}{\partial S(x)} + M_3 U, \quad (5)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & c_0 & 0 \\ 0 & a & 0 & c_0 \\ c_0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & b \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & a-2\mu_1 & 0 & c_0-2\mu_3 \\ 2\mu_1-a & 0 & 2\mu_3-c_0 & 0 \\ 0 & c_0-2\mu_3 & 0 & b-2\mu_2 \\ 2\mu_3-c_0 & 0 & 2\mu_2-b & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} -b_1 n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & b_1 n_2 \frac{\partial}{\partial x_1} & -dn_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & dn_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ b_1 n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} & -b_1 n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} & dn_1 \frac{\partial}{\partial x_2} & -dn_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ -dn_1 \frac{\partial}{\partial x_2} & dn_2 \frac{\partial}{\partial x_1} & -b_2 n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & b_2 n_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ dn_1 \frac{\partial}{\partial x_2} & -dn_1 \frac{\partial}{\partial x_1} & b_2 n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} & -b_2 n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial n(x)} = n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial s(x)} = n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - n_2 \frac{\partial}{\partial x_1},$$

$n = (n_1, n_2)^T = (0, -1)^T$ is a unit vector.

Finally if D^+ domain $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ is a regular solution of equations (1) [(2)] then we have (Basheleishvili 1995, 59-105)

$$\int_L TU(y)|_{y_2=0} dy_1 = 0,$$

$$\int_{D^+} H(x) dx = \int_L \frac{\partial U(y)}{\partial n(y)}|_{y_2=0} dy_1, \quad (6)$$

where $H = (h_1, h_2, h_3, h_4)^T$,

2⁰. In the present work we consider the boundary value problem. Find in the domain D^+ a vector $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ which is a regular solution of equations (1) or (2) and satisfying the following boundary conditions:

3. სავსადგ

$$\begin{aligned}
 (u_1 + u_3)|_L &= f_1(x_1), & x_1 \in L, \\
 (u_2 - u_4)|_L &= f_2(x_1), & x_1 \in L, \\
 \frac{\partial}{\partial x_2}(u_2 + u_4)|_L &= f_3(x_1), & x_1 \in L, \\
 \omega|_L &= \begin{pmatrix} \omega' \\ \omega'' \end{pmatrix} \Big|_L = \begin{pmatrix} f_4(x_1) \\ f_5(x_1) \end{pmatrix}, & x_1 \in L,
 \end{aligned} \tag{7}$$

where f_1, f_2, f_2', f_3, f_4 and f_5 are real continuous and bounded functions a defined on L. further more satisfies concrete conditions:

Note that from conditions:

$$\begin{aligned}
 (u_2 - u_4)|_L &= f_2(x_1), & \omega'|_L &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \Big|_L = f_4(x_1), \\
 \omega''|_L &= \left(\frac{\partial u_4}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \Big|_L = f_5(x_1), & x_1 \in L
 \end{aligned}$$

follows that

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(u_1 - u_3)|_L = f_2'(x_1) + f_5(x_1) - f_4(x_1) = F(x_1), \quad x_1 \in L. \tag{8}$$

In view of (8) the boundary conditions of the (2), (7) problem can be written as

$$\begin{aligned}
 (u_1(x) + u_3(x))|_L &= f_1(x_1), & x_1 \in L, \\
 \frac{\partial(u_1(x) - u_3(x))}{\partial x_2} \Big|_L &= f_2'(x_1) + f_5(x_1) - f_4(x_1) = F(x_1), & x_1 \in L, \\
 (u_2(x) - u_4(x))|_L &= f_2(x_1), & x_1 \in L, \\
 \frac{\partial(u_2(x) + u_4(x))}{\partial x_2} \Big|_L &= f_3(x_1), & x_1 \in L, \\
 \omega'(x)|_L &= \left(\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} \right) \Big|_L = f_4(x_1), & x_1 \in L, \\
 \omega''(x)|_L &= \left(\frac{\partial u_4}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \Big|_L = f_5(x_1), & x_1 \in L.
 \end{aligned} \tag{9}$$

The following assertion is true.

Theorem 2°. The general solution of the homogeneous problem (2), (7) is represented by the formula $U_0(x) = (\beta, \gamma, -\beta, \gamma)^T$ where β and γ are arbitrary real constants.

3°. Solution of the problem (2), (7).

Let us consider the following Dirichlet problem

$$\Delta \omega(x) = \Delta(\omega'(x), \omega''(x))^T = 0, \quad (\omega'(x), \omega''(x))^T|_L = (f_4(x_1), f_5(x_1))^T$$

and note that a solution of the problem is

$$\omega(x) = \begin{pmatrix} \omega'(x) \\ \omega''(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} f_4(y_1) \\ f_5(y_1) \end{pmatrix} dy_1. \quad (10)$$

Now note that, owing to the (10) we can conclude that (see (3))

$H = (h_1, h_2, h_3, h_4)^T$ is known vector-functions and belongs to the class $C'(D^+) \cap C(\bar{D} \cup L)$.

By virtue of the above said from (3), (4) and (9) it follows that the problem (2), (7) can be reduced to the Dirichlet and Neumann boundary value problems for the Poisson equation in the domain $D^+(x_2 > 0)$

$$\begin{aligned} \Delta[u_1(x) + u_3(x)] &= h_1(x) + h_3(x), & x \in D^+, \\ [u_1(x) + u_3(x)]|_L &= f_1(x_1), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Delta[u_2(x) - u_4(x)] &= h_2(x) - h_4(x), & x \in D^+, \\ [u_2(x) - u_4(x)]|_L &= f_2(x_1), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta[u_1(x) - u_3(x)] &= h_1(x) - h_3(x), & x \in D^+, \\ \frac{\partial}{\partial x_2}[u_1(x) - u_3(x)]|_L &= F(x_1), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Delta[u_2(x) + u_4(x)] &= h_2(x) + h_4(x), & x \in D^+, \\ \frac{\partial}{\partial x_2}[u_2(x) + u_4(x)]|_L &= f_3(x_1), \end{aligned} \quad (14)$$

Further note that owing to the second formula (6) the necessary conditions (Владимиров 1988)

$$\begin{aligned} \int_{D^+} [h_1(y) - h_3(y)] dy - \int_{-\infty}^{\infty} F(y_1) dy_1 &= 0, \\ \int_{D^+} [h_2(y) + h_4(y)] dy - \int_{-\infty}^{\infty} f_3(y_1) dy_1 &= 0, \end{aligned}$$

of solvability (13) and (14) problems are fulfilled.

Taking into account the obtained results we see that the problem (2), (7) is solvable and is represented by the solution of the problems (11)-(14).

3. სავსადგ

The solution of the problems (11), (12), (13) and (14) can be represented as respectively (Владимиров 1988).

$$u_1(x) + u_3(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{D^+} G(x, y) [h_1(y) + h_3(y)] dy + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_2 f_1(y_1) dy_1}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} \quad , \quad (15)$$

$$u_2(x) - u_4(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{D^+} G(x, y) [h_2(y) - h_4(y)] dy + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_2 f_2(y_1) dy_1}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} \quad , \quad (16)$$

$$u_1(x) - u_3(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{D^+} G_{(1)}(x, y) [h_1(y) - h_3(y)] dy + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} F(y_1) dy_1, \quad (17)$$

$$u_2(x) + u_4(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{D^+} G_{(1)}(x, y) [h_2(y) + h_4(y)] dy + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} f_3(y_1) dy_1, \quad (18)$$

Here (Doborginidze, Shatahvili 1982)

$$G(x, y) = \ln \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} - \ln \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2} .$$

$$\text{and } G_{(1)}(x, y) = \ln \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} + \ln \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2} .$$

are the Green functions of the Dirichlet and Neuman problems respectively in a domain D^+ for the Laplace equation.

Finally, by virtue of the formulas (15)-(18) we can find the solution of problem (2), (7), are given in quadrature.