

მათემატიკური ფიზიკა

მოძრაობის განტოლება ბლანტი დრეკადობის სამგანზომილებიანი
წილადური მოდელისათვის

თეიმურაზ სურგულაძე

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო
teimuraz.surguladze@atsu.edu.ge

ბოლო 4 ათეული წლის განმავლობაში წილადური რიგის დიფერენციალური განტოლებები და აბელის ტიპის ინტეგრალური განტოლებები განიხილებიან როგორც ძალზედ მნიშვნელოვანი და სასარგებლო საშუალებები სხვადასხვა პროცესების მემკვიდრეობითი და დამახსოვრებადი თვისებების შესასწავლად. ზოგიერთ შემთხვევაში მათ მიეყვართ უფრო ადეკვატურ მოდელებამდე, ვიდრე მოდელები, რომლებიც ეფუძვნება მთელი რიგის წარმოებულებს. ძირითადი ყურადღება გამახვილებული იქნა ისეთი მოდელების შესწავლისადმი, რომლებიც ეფუძვნება დიფუზიურ-ტალღურ წილადურ დიფერენციალურ განტოლებებს. ასეთი განტოლებები წარმატებით იქნა გამოყენებული სხვადასხვა მოვლენების მოდელირებისათვის. მაგალითად, ბლანტი დრეკადი მასალების ყოფაქცევის შესასწავლად, დიფუზიური პროცესების შესასწავლად ისეთ ფოროვან არეებში, რომლებიც ჩნდებიან ფრაქტალურ გეომეტრიაში, თეთრი ხმაურის მოდელირებისათვის და ა.შ. მოცემულ ნაშრომში შეისწავლება მოძრაობის განტოლება ბლანტი დრეკადობის სამგანზომილებიანი წილადური მოდელისათვის, როცა განსაზღვრელი თანაფარდობები შეიცავენ წილადური რიგის წარმოებულებს რიმან-ლიუვილის აზრით. ნაჩვენებია მიღებული მოძრაობის განტოლებების ჰიპერბოლურობა.

საკვანძო სიტყვები: ბლანტი დრეკადობა, წილადური რიგის წარმოებული, განტოლების ჰიპერბოლურობა

შესავალი. წინასწარ შემოვიღოთ რამოდენიმე განსაზღვრება, რომელთაც ჩვენ გამოვიყენებთ სტატიაში.

განსაზღვრება 1: ვთქვათ $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ რაიმე დიფერენციალური

ოპერატორია, მუდმივკოეფიციენტებიანი ან ცვლადკოეფიციენტებიანი, წრფივი ან არაწრფივი, აქ x შეიძლება იყოს როგორც ერთგანზომილებიანი ასევე ნებისმიერი სასრულგანზომილებიანი. ფუნქციას $E(t, x)$ ეწოდება

$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ოპერატორის ფუნდამენტური ამონახსენი თუკი იგი აკმაყოფილებს განტოლებას

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)E(t, x) = \delta(t)\delta(x) \quad (1)$$

სადაც δ დირაკის ფუნქციაა.

განსაზღვრება 2: ვთქვათ $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ოპერატორს აქვს ფუნდამენტური ამონახსენი $E(t, x) \in D'$, ისეთი, რომ

$$\text{supp } E(t, x) \subset \{(t, x) | t \geq \text{const}|x|\}, \quad \text{const} > 0 \quad (2)$$

სადაც D' განზოგადოებულ ფუნქციათა სიმრავლეა, მაშინ $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ოპერატორს ეწოდება ჰიპერბოლური D' -ში

განსაზღვრება 3: ვთქვათ S' ნელი ზრდადობის მქონე განზოგადოებულ ფუნქციათა სიმრავლეა: ვთქვათ $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ოპერატორს აქვს ფუნდამენტური ამონახსენი $E(t, x)$ ისეთია, რომ $e^{-Mt}E(t, x) \in S'$ რაიმე $M > 0$ რიცხვისათვის. მაშინ $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ოპერატორს ეწოდება ჰიპერბოლური S' -ში.

განსაზღვრება 4: $\Phi(t)$ ფუნქციას, რომელიც 0-ის ტოლია, როცა $t < 0$, ხოლო, როცა $t > 0$ აკმაყოფილებს შემდეგ 4 პირობას:

1. $\Phi(t)$ ოთხჯერ დიფერენცირებადია;
2. $(-1)^k \frac{d^k \Phi(t)}{dt^k} \geq 0, k = 0, 1, 2, 3;$
3. $\Phi(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow 0+;$
4. არსებობს ისეთი $\alpha \in (0, 1)$, რომ ფუნქცია $t^\alpha \Phi(t)$ ზრდადია მცირე t -სათვის.

ეწოდება ჰიპერბოლურობის ფუნქცია.

ვთქვათ $\lambda \in R^1, \sigma \in R^m$. m რიგის ერთგვაროვან $P(\lambda, \sigma)$ მრავალწევრს ეწოდება ჰიპერბოლური λ ცვლადის მიმართ, თუ ყოველი σ -სათვის

თ. სურგულაძე

განტოლებას $P(\lambda, \sigma) = 0$ აქვს m ნამდვილი ფესვი $\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma), \dots, \lambda_m(\sigma)$.

ცნობილია, რომ ერთგვაროვანი დიფერენციალური ოპერატორი ჰიპერბოლურია D' -ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი სიმბოლო არის ჰიპერბოლური მრავალწევრი.

$P(\lambda, \sigma)$ მრავალწევრს ეწოდება მკაცრად ჰიპერბოლური, თუ $\sigma \neq 0$ ყველა ფესვი $\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma), \dots, \lambda_m(\sigma)$ განსხვავებულია. ამ შემთხვევაში ოპერატორს $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ეწოდება მკაცრად ჰიპერბოლური.

განსაზღვრება 5: სიმრავლეს

$$\{\lambda, \sigma | P(\lambda, \sigma) = 0\} \subset R^1 \times R^m \quad (3)$$

ეწოდება P ოპერატორის ნორმალების კონუსი. (3)-ს დამატებას, რომელიც შეიცავს $\lambda > 0$ ნახევარდერძს ეწოდება P ოპერატორის ნორმალების კონუსის

გული და მას აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\overset{\circ}{N}$ -ით. ცნობილია, რომ ჰიპერბოლური ოპერატორის ნორმალების კონუსის გული ამოზნექილია (Локшин 1979: 231-234; Хермандер 1965, Hormander 2004).

განსაზღვრება 6: P ოპერატორს ეწოდება ოპერატორი ნორმალების შემოსაზღვრული ზედაპირით თუ მისი ნორმალების კონუსი (3) და ჰიპერსიბრტყე $\lambda = 0$ გადაიკვეთებიან მხოლოდ კოორდინატთა სათავეში. წინააღმდეგ შემთხვევაში ოპერატორს ეწოდება ოპერატორი ნორმალების შემოუსაზღვრელი ზედაპირით.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\overset{\circ}{K} = \left\{ t, x | t\lambda + x \cdot \sigma \geq 0, (\lambda, \sigma) \in \overset{\circ}{N} \right\} \subset R^1 \times R^m \quad (4)$$

აქ $x \cdot \sigma$ აღნიშნულია x -სა და σ -ს სკალარული ნამრავლი.

$\overset{\circ}{K}$ კონუსს ეწოდება P ოპერატორის გავრცელების კონუსი და იგი ემთხვევა P ოპერატორის E_P ფუნდამენტური ამონახსნის მზიდის ამოზნექილ გარსს, რომელიც აღწერს შეშფოთების სასრული სიჩქარით გავრცელებას.

ვთქვათ K არის $t > 0$ ნახევარდერძითა და $\overset{\circ}{K}$ კონუსით შექმნილი სიმრავლის ამოზნექილი გარსის ჩაკეტვა. ზოგადადაც ცხადია, რომ $\overset{\circ}{K} \subseteq K$

K კონუსს ეწოდება P ოპერატორის გავლენის კონუსი.

ანალოგიურად განისაზღვრება კონუსი

$$N = \{t, x | t\lambda + x \cdot \sigma \geq 0, (\lambda, \sigma) \in K\} \subset R^1 \times R^m \quad (5)$$

(4)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$N \subseteq \overset{\circ}{N} \quad (6)$$

ვთქვათ P ოპერატორი განისაზღვრება ფორმულით

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = P_0\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \Phi(t) * P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (7)$$

სამართლიანია შემდეგი თეორემა (Локшин 1979: 231-234; Локшин, Суворова 1982).

თეორემა: ვთქვათ P_0 მკაცრად ჰიპერბოლური ოპერატორია ნორმალთა შემოსაზღვრული ზედაპირით. მაშინ იმისათვის, რომ (7) ტოლობით განსაზღვრული ოპერატორი, სადაც $\Phi(t)$ არის ჰიპერბოლურობის ფუნქცია, იყოს ჰიპერბოლური S' აუცილებელია და საკმარისია, რომ სრულდებოდეს უტოლობები

$$k_j \geq 0, j = 1, 2, \dots \quad (8)$$

თუკი (8) თანაფარდობები სრულდება P ოპერატორის $E(t, x)$ ფუნდამენტური ამონახსნისათვის $\sup E(t, x) \subset K$ და $E(t, x)$ არაა იგივეურად $0 \leq Q = \partial K \cap \partial \overset{\circ}{K}$ სიმრავლის არცერთი წერტილის არცერთ მიდამოში. აქ K და $\overset{\circ}{K}$ არიან P_0 ოპერატორის გავლენის და გავრცელების კონუსები შესაბამისად.

დაბოლოს შემოვიღოთ რიმა-ლიუვილის აზრით წილადური რიგის ინტეგრალისა და წარმოებულის ცნებები:

განსაზღვრება 7: ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნახევრადღია $(a, b]$ ინტერვალზე, და ვთქვათ $\alpha > 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის α რიგის წილადური ინტეგრალი $x \in (a, b]$ წერტილში განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$${}_a D_x^{-\alpha} f(x) = J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (9)$$

ამ ფორმულაში Γ - თი აღნიშნულია ეილერის გამა ფუნქცია

თ. სურგულაძე

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (10)$$

ვთქვათ $0 \leq m-1 < \alpha \leq m$, $m=1,2,3,\dots$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის α რიგის წილადური რიგის წარმოებული $x \in (a, b]$ წერტილში განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$${}_a D_x^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right] \quad (11)$$

1. მოძრაობის განტოლება

ვთქვათ ბლანტი დრეკადობის სამგანზომილებიანი მოდელის განმსაზღვრელი თანაფარდობა, რომელიც შეიცავს წილადური რიგის წარმოებულს რიმან-ლიუვილის აზრით ჩაიწერება სახით:

$$s_{ij}(t) + b_G^{\alpha_G} D^{\alpha_G} s_{ij}(t) = 2G_\infty e_{ij}(t) + 2Gb_G^{\alpha_G} D^{\alpha_G} e_{ij}(t), \quad 0 < \alpha_G < 1 \quad (12)$$

$$\sigma_{kk}(t) = 3K\varepsilon_{kk}(t) \quad (13)$$

ამ ტოლობებში $s_{ij}(t)$ არის დაძაბულობის $\sigma_{ij}(t)$ ტენზორის დევიატორული ნაწილი, $e_{ij}(t)$ არის დეფორმაციის $\varepsilon_{ij}(t)$ ტენზორის დევიატორული ნაწილი; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ არის წანაცვლების მოდული; G_∞

არის წანაცვლების გრძელვადიანი მოდული; $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ არის გაფართოების მოდული; ν არის პუასონის კოეფიციენტი.

ვთქვათ $\frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}$ არის დაძაბულობის ტენზორის სფერული ნაწილი, ხოლო $\frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}$ კი არის დეფორმაციის ტენზორის სფერული ნაწილი ე.ი.

$$\sigma_{ij}(t) = s_{ij}(t) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}(t) = 2G\varepsilon_{ij}(t) + \left(K - \frac{2G}{3} \right) \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(t) - \frac{2\bar{G}}{b_G^{\alpha_G}} \quad (14)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}; \quad e_{ii} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0 \quad (15)$$

გამოვიყვანოთ (12) ფორმულიდან პირდაპირი და შებრუნებული თანაფარდობები ე.ი. s_{ij} გამოვსახოთ e_{ij} -ით და პირიქით.

აღვნიშნოთ I_α^* -ით აბელის ინტეგრალური ოპერატორი გულით

$$I_{\alpha} = \frac{t^{\alpha} h(t)}{\Gamma(1+\alpha)}, -1 < \alpha < 0$$

თუ $\mathfrak{D}_{\alpha}^{*}(\lambda)$ -ით აღვნიშნავთ აბელის ოპერატორის რეზოლვენტურ ოპერატორს, მაშინ $\mathfrak{D}_{\alpha}^{*}(\lambda)$ -ის გული იქნება წილად - ექსპონენციალური ფუნქცია

$$\mathfrak{D}_{\beta-1}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}t\right) = t^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)^n t^{n\beta}}{\Gamma[(n+1)\beta]} \quad (16)$$

და სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა (Владимиров 1988, Победря 1995, Ильюшин, Победря 1970, Работнов 1977, Podlubny 1999)

$$D^{\beta} I_{\alpha}^{*} f(t) = I_{\alpha}^{*} D^{\beta} f(t) = f(t), f(0) = 0 \quad (17)$$

(12) ტოლობის ორივე მხარეზე გამოვიყენოთ ოპერატორი $I_{\alpha_G-1}^{*}$ და თუ ვისარგებლებთ (17) ტოლობით მივიღებთ

$$\left(1 + \frac{1}{b_G^{\alpha_G}} I_{\alpha_G-1}^{*}\right) s_{ij}(t) = 2G \left(1 + \frac{G_{\infty}}{b_G^{\alpha_G} G} I_{\alpha_G-1}^{*}\right) e_{ij}(t) \quad (18)$$

გამოვიყენოთ (18) ტოლობის ორივე მხარეზე ოპერატორი

$$\left(1 + \frac{1}{b_G^{\alpha_G}} I_{\alpha_G-1}^{*}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^{*}\left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}}\right)$$

მივიღებთ

$$s_{ij}(t) = 2G e_{ij}(t) - \frac{2\overline{G}}{b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^{*}\left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}}\right) e_{ij}(t) \quad (19)$$

სადაც

$$\overline{G} = G - G_{\infty}$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$e_{ij}(t) = \frac{1}{2G} s_{ij}(t) + \frac{\overline{G}}{2G^2 b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^{*}\left(-\frac{G_{\infty}}{G b_G^{\alpha_G}}\right) \quad (20)$$

(13),(14) და (17) ფორმულებიდან მივიღებთ

თ. სურგულაძე

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(t) &= s_{ij}(t) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}(t) = \\ &= 2G\varepsilon_{ij}(t) + \left(K - \frac{2G}{3}\right) \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(t) - \frac{2\bar{G}}{b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}}\right) \left(\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(t)\right) \quad (21)\end{aligned}$$

ბოლო ფორმულიდან გვაქვს

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= 2G(u_{i,jj} + u_{j,ji}) + \left(K - \frac{2G}{3}\right) u_{k,ki} - \frac{2\bar{G}}{b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}}\right) \left(u_{i,jj} + u_{j,ji} - \frac{1}{3} u_{k,ki}\right) = \\ &= 2Gu_{i,jj} + \left(K + \frac{4G}{3}\right) u_{j,ji} - \frac{2\bar{G}}{b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}}\right) \left(u_{i,jj} + \frac{2}{3} u_{j,ji}\right) \quad (22)\end{aligned}$$

აქ $u_i, i=1,2,3$ აღნიშნულია მატერიალური წერტილის გადაადგილების $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ვექტორის კომპონენტი.

მოძრაობის განტოლებას მასიური ძალების არ არსებობის შემთხვევაში აქვს სახე

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (23)$$

სადაც ρ სიმკვრივეა.

თუკი (22)-ს ჩავსვამთ (23)-ში და მიღებულ შედეგს ავჯამავთ $i=1,2,3$ -ს მიმართ მივიღებთ

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \frac{2G}{\rho} \Delta \vec{u} - \frac{K + \frac{4G}{3}}{\rho} \text{grad}(\text{div}(\vec{u})) + \\ + \frac{2\bar{G}}{\rho b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}}\right) \left(\Delta \vec{u} + \frac{2}{3} \text{grad}(\text{div}(\vec{u}))\right) = 0 \quad (24)\end{aligned}$$

გადაადგილებათა ველი წარმოვადგინოთ სახით

$$\vec{u} = \text{grad}(\varphi) + \text{rot}(\vec{\psi}) \quad (25)$$

სადაც φ არის $x = (x_1, x_2, x_3)$ კოორდინატებისა და t დროის სკალარული ფუნქცია, ხოლო $\vec{\psi}$ კი კოორდინატებისა და t დროის ვექტორული ფუნქცია.

ცხადია, რომ

$$\text{div}(\vec{u}) = \Delta \varphi$$

რადგანაც

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\left(\vec{\psi}\right)\right)=0$$

ნებისმიერი ვექტორისათვის.

თუ ბოლო ორ ტოლობას ჩავსვამთ (24)-ში მივიღებთ

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \operatorname{rot} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} - \frac{2G}{\rho} \left(\operatorname{grad} \Delta \varphi + \operatorname{rot} \Delta \vec{\psi} \right) - \frac{K + \frac{4G}{3}}{\rho} \operatorname{grad} \Delta \varphi + \\ + \frac{2\bar{G}}{\rho b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \right) \left(\operatorname{grad} \Delta \varphi + \operatorname{rot} \Delta \vec{\psi} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \Delta \varphi \right) = 0 \end{aligned}$$

აქედან ვღებულობთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{K + \frac{4G}{3}}{\rho} \Delta \varphi + \frac{5}{3} \frac{2\bar{G}}{\rho b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \right) \Delta \varphi = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} - \frac{2G}{\rho} \Delta \psi_i + \frac{2\bar{G}}{\rho b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \right) \Delta \psi_i = 0, i = 1, 2, 3 \quad (27)$$

შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები

$$P^{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) = P_0^{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{10\bar{G}}{3\rho b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \right) P_1^{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (28)$$

სადაც

$$P_0^{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho} \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \quad (29)$$

$$P_1^{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (30)$$

$$P^{(1)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) = P_0^{(1)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{2\bar{G}}{\rho b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \right) P_1^{(1)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (31)$$

$$P_0^{(1)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2G}{\rho} \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2G}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \quad (32)$$

$$P_1^{(1)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (33)$$

ამ ფორმულაში $t \in R^1$ $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$.

თ. სურგულაძე

ვაჩვენოთ, რომ $P^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ და $P^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ოპერატორები ჰიპერბოლური ოპერატორებია, მასთან დამტკიცება ჩავატაროთ მხოლოდ $P^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ოპერატორისთვის, დამტკიცება $P^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ოპერატორისათვის ანალოგიურია.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ფუნქციები

$$\Phi^{(0)}(t) = \frac{10\bar{G}}{3\rho b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}\left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}}, t\right)$$

$$\Phi^{(1)}(t) = \frac{2\bar{G}}{\rho b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}\left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}}, t\right)$$

არიან ჰიპერბოლურობის ფუნქციები, თუ $\bar{G} = G - G_\infty > 0$.

ცხადია, რომ $P^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ოპერატორის სიმბოლოს აქვს სახე

$$P^{(0)}(\lambda, \sigma) = P_0^{(0)}(\lambda, \sigma) + \Phi^{(0)}(\lambda) P_1^{(0)}(\lambda, \sigma) \quad (34)$$

$$\lambda \in \left[-\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}, \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho} \right] - \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \quad \text{არის}$$

$$P_0^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \text{ ოპერატორის სიმბოლო; } P_1^{(0)}(\lambda, \sigma) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \quad \text{არის}$$

$$P_1^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \text{ ოპერატორის სიმბოლო } \Phi^{(0)}(\lambda) \text{ არის } \Phi^{(0)}(t) \text{ ფუნქციის}$$

ფურიე-ლაპლასის გარდაქმნა

$$\Phi^{(0)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{(0)}(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda = \mu - ip, \quad p > 0 \quad (35)$$

ცხადია, როცა $\sigma \neq 0$

$$P_0^{(0)}(\lambda, \sigma) = \lambda^2 - \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = 0 \quad (36)$$

განტოლების ფესვები იქნება

$$\lambda_1(\sigma) = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \neq 0 \quad (37)$$

$$\lambda_2(\sigma) = -\sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \neq 0 \quad (38)$$

(37)-დან და (38)-დან გამომდინარეობს, რომ $\lambda_1(\sigma) \neq \lambda_2(\sigma)$ ამიტომ $P_0^{(0)}(\lambda, \sigma)$ პოლინომი არის მეორე რიგის მკაცრად ჰიპერბოლური პოლინომი, ამიტომ $P_0^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ - მკაცრად ჰიპერბოლური ოპერატორია.

როგორც (5) განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს $P_0^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ოპერატორის ნორმალეზის კონუსი განსაზღვრება ფორმულით

$$\begin{aligned} & \left\{ (\lambda, \sigma) \mid P_0^{(0)}(\lambda, \sigma) = 0 \right\} = \\ & = \left\{ (\lambda, \sigma) \mid \lambda^2 - \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = 0 \right\} \subset R^1 \times R^3 \quad (39) \end{aligned}$$

(39) -დან გამომდინარეობს, რომ $P_0^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ოპერატორის ნორმალეზის გული იქნება კონუსი (იხ. განსაზღვრება 5.)

$$\overset{\circ}{N} = \left\{ (\lambda, \sigma) \mid \lambda > \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} |\sigma| \right\} \subset R^1 \times R^3 \quad (40)$$

სადაც $|\sigma| = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$.

ოპერატორი $P_0^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ არის ოპერატორი ნორმალეზის შემოსაზღვრული ზედაპირით (იხ. განსაზღვრება 6.), რადგანაც მისი ნორმალეზის კონუსი (39) და ჰიპერსიბრტყე $\lambda = 0$ იკვეთება მხოლოდ კოორდინატთა სათავეში.

მართლაც, ამ თანაკვეთის საპოვნელად უნდა ამოვხსნათ შემდეგ განტოლებათა სისტემა

თ. სურგულაძე

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 - \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

ცნობილია, რომ ([6]) $P_0^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ოპერატორის ფუნდამენტური

ამონასხენი მოიცემა ფორმულით

$$E_3^0(x, t) = \frac{h(t)}{4\pi a^2} \delta_{S_{at}(x)} = \frac{h(t)}{2\pi a} \delta(a^2 t^2 - |x|^2) \quad (41)$$

$E_3^0(x, t)$ ძირითად ფუნქცია $\varphi \in D(R^4)$ მოქმედებს შემდეგნაირად

$$(E_3^0, \varphi) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x, t) dx dt = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{R^3} \frac{\varphi\left(x, \frac{|x|}{a}\right)}{|x|} dx \quad (42)$$

$$(41) \text{ და } (42) \text{ ფორმულებში } a^2 = \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}.$$

$E_3^0(x, t)$ ფუნდამენტური ამონასხენის მზიდი ემთხვევა

$$at = |x| \quad (43)$$

მომავლის კონუსის საზღვარს.

რადგანაც $P_0^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ოპერატორს აქვს ნორმალეზის შემოსაზღვრული

ზედაპირი ამიტომ (Локшин, Суворова 1982)

$$N = \mathring{N}, \quad K = \mathring{K}$$

აღნიშნოთ Ω -თი

$$\Omega = \{\sigma : |\sigma| = 1\} \quad (44)$$

სფერო R^3 -ში.

განვიხილოთ გამოსახულება

$$P_0^{(0)}(\lambda, \omega \vartheta) = \lambda^2 - \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho} \vartheta^2 \quad (45)$$

სადაც $\omega \in \Omega, \vartheta \in R^1$.

1. m რიგის ერთგვაროვანი მკცრად ჰიპერბოლური დიფერენციალური
 $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ოპერატორისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა (Gorenflo
 2014, Surguladze 2002: 4517- 4557, Hormander 2004)

$$P(\lambda, \omega \vartheta) = P(1, 0) \prod_{j=1}^m (\lambda - c_j(\omega) \vartheta) \quad (46)$$

$$P_0^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \text{ ოპერატორისათვის გვაქვს}$$

$$P_0^{(0)}(\lambda, \omega \vartheta) = \lambda^2 - \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho} \vartheta^2 = \left(\lambda - \frac{\sqrt{K + \frac{4}{3}G}}{\sqrt{\rho}} \vartheta \right) \left(\lambda + \frac{\sqrt{K + \frac{4}{3}G}}{\sqrt{\rho}} \vartheta \right) \quad (47)$$

ე.ი.

$$c_1(\omega) = \lambda - \frac{\sqrt{K + \frac{4}{3}G}}{\sqrt{\rho}} \vartheta, c_2(\omega) = \lambda + \frac{\sqrt{K + \frac{4}{3}G}}{\sqrt{\rho}} \vartheta \quad (48)$$

როცა $\omega \in \Omega$.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა (Локшин, Суворова 1982).

თეორემა: ვთქვათ M არის ოპერატორი, რომლის სიმბოლოცაა

$$M(\lambda, \sigma) = \sum_{s=0}^{\infty} (\Phi(\lambda))^s P_s(\lambda, \sigma) \quad (49)$$

სადაც $\Phi(t)$ ჰიპერბოლურობის ფუნქციაა.

ვთქვათ P_0 მკცრად ჰიპერბოლური ოპერატორია ნორმალუბის
 შემოსაზღვრული ზედაპირით. მაშინ იმისათვის, რომ M იყოს
 ჰიპერბოლური S' -ში და ინარჩუნებდეს ამ თვისებას P_s ; $s = 0, 1, 2, \dots$
 ოპერატორების კოეფიციენტების ნებისმიერი მცირე ნამდვილი
 შემოფოიებებისას აუცილებელია და საკმარისი, რომ სრულდებოდეს
 შემდეგი უტოლობა

$$k_j(\omega) = \frac{P_1(\lambda, \vartheta \omega)}{\lambda \frac{d}{d\lambda} P_0(\lambda, \vartheta \omega)} \bigg|_{\lambda=c_j(\omega), \vartheta \neq 0} > 0, j = 1, 2, \dots \quad (50)$$

თ. სურგულაძე

თუ (50) სრულდება, მაშინ $\sup E(t, x) \subseteq \overset{\circ}{K}$ და ტოლობა $E(t, x) = 0$ არ სრულდება $Q \in \partial \overset{\circ}{K}$ წერტილის არცერთ მიდამოში (აქ $E(t, x)$ M ოპერატორის ფუნდამენტური ამონახსენია, რომელიც აღწერს შეშვოთების სასრული სიჩქარით გავრცელებას, $\overset{\circ}{K}$ არის P_0 ოპერატორის გავრცელების კონუსი).

განვიხილოთ (28), თუ შევადარებთ (49)-ს მივიღებთ

$$P_0(\lambda, g\omega) = P_0^{(0)}(\lambda, \omega g) = \lambda^2 - \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho} g^2 =$$

$$= \left(\lambda - \frac{\sqrt{K + \frac{4}{3}G}}{\sqrt{\rho}} g \right) \left(\lambda + \frac{\sqrt{K + \frac{4}{3}G}}{\sqrt{\rho}} g \right)$$

$$P_1(\lambda, g\omega) = P_1^{(0)}(\lambda, \omega g) = g^2 \quad (51)$$

გამოვთვალოთ

$$k_1(\omega) = \frac{g^2}{\lambda \cdot 2\lambda} \Big|_{\lambda = \frac{\sqrt{K + \frac{4}{3}G}}{\sqrt{\rho}} g, g \neq 0} = \frac{g^2}{2 \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho} g^2} = \frac{\rho}{2 \left(K + \frac{4}{3}G \right)} > 0 \quad (52)$$

$$k_2(\omega) = \frac{g^2}{\lambda \cdot 2\lambda} \Big|_{\lambda = -\frac{\sqrt{K + \frac{4}{3}G}}{\sqrt{\rho}} g, g \neq 0} = \frac{\rho}{2 \left(K + \frac{4}{3}G \right)} > 0 \quad (53)$$

რადგანაც $\Phi^{(0)}(t) = \frac{10\bar{G}}{3\rho b_G^{a_G}} \mathcal{D}_{a_G-1} \left(-\frac{1}{b_G^{a_G}}, t \right)$ არის ჰიპერბოლურობის

ფუნქცია ამიტომ მოყვანილი თეორემიდან და (52) და (53) ფორმულებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემის სამართლიანობა.

თეორემა: (28) ოპერატორი არის ჰიპერბოლური S' -ში და ინარჩუნებს ამ

თვისებას $P_0^{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ და $P_1^{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ ოპერატორების კოეფიციენტების

ნებისმიერი მცირე ნამდვილი შეშვოთებებისას. თუ $E_3(t, x)$ არის (28) ოპერატორის ფუნდამენტური ამონახსენი, მაშინ

$$\sup E_3(t, x) \subset \overset{\circ}{K} = \left\{ (t, x); t \geq \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{K + \frac{4G}{3}}} |x| \right\}$$

და ტოლობა $E_3(t, x) = 0$ არ სრულდება $Q \in \overset{\circ}{K}$ წერტილის არცერთ მიდამოში.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემის სამართლიანობა.

თეორემა: (31) ოპერატორი არის ჰიპერბოლური S' -ში და ინარჩუნებს ამ თვისებას $P_0^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ და $P_1^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ოპერატორების კოეფიციენტების ნებისმიერი მცირე ნამდვილი შეშფოთებებისას. თუ $E_3(t, x)$ არის (31) ოპერატორის ფუნდამენტური ამონახსენი, მაშინ

$$\sup E_3(t, x) \subset \overset{\circ}{K} = \left\{ (t, x); t \geq \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2G}} |x| \right\}$$

და ტოლობა $E_3(t, x) = 0$ არ სრულდება $Q \in \overset{\circ}{K}$ წერტილის არცერთ მიდამოში.

ბოლოს გავაკეთოთ რამოდენიმე დასკვნა, რომლებიც გამომდინარეობენ მიღებული შედეგებიდან.

ვთქვათ $\vec{\psi} = 0$ მაშინ (25)-დან გამომდინარეობს, რომ $\vec{u} = \text{grad}(\varphi), \text{rot}(\vec{u}) = 0$.

ეს გვიჩვენებს, რომ φ ფუნქციით აღწერილ ტალღაში არ მიმდინარეობს არის ნაწილაკების ბრუნვა ე.ი. თითოეული მათგანი მოძრაობს წინსვლით. ასეთ ტალღებს ეწოდებათ გრძივი. ამგვარად (26) აღწერს გრძივი ტალღების გავრცელებას.

ვთქვათ ახლა $\varphi \equiv 0$ მაშინ $\vec{u} = \text{rot}(\vec{\psi})$. ასეთ ველში სივრცითი გაფართოება ტოლია 0-ის. მართლაც $\text{div}(\vec{u}) = \text{divrot}(\vec{\psi}) = 0$. ასეთი თვისების მქონე ტალღებს ეწოდებათ განივი ანუ ძვრის ტალღები. ე.ი. (27) განტოლება აღწერს განივ ტალღებს.

თ. სურგულაძე

ლიტერატურა

Gorenflo 2014: Rudolf Gorenflo, Anatoly A. Kilbas, Francesco Mainardi, Sergei V. Rogosin. Mittag-Leffler functions, Related Topics and Applications, Springer – Verlag Berlin, 2014.

Hormander 2004: Lars Hormander. The Analysis of partial differential operators II, 2004, <https://b-ok2.org/book/746553/3352a4>

Podlubny 1999: I. Podlubny. Fractional Differential Equations (An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solutions and Some of Their Applications). Academic Press. San-Diego, 1999.

Surguladze 2002: T.A.Surguladze. On Certain Applications of fractional calculus to viscoelasticity; Journal of Mathematical Sciences, v.112, №5, 2002.

Владимиров 1988: В.С.Владимиров. Уравнения математической физики, Москва: „Наука“, 1988.

Ильюшин, Победря 1970: А.А.Ильюшин, Б.Е.Победря. Основы математической теорий термовязкоупругости, Москва, изд-во „Наука“, 1970.

Локшин, Суворова 1982: А.А.Локшин, Ю.В.Суворова. Математическая теория распространения волн в средах с памятью, Москва, Изд-во Московского Университета, 1982.

Локшин 1979: А.А.Локшин. Рассеяние плоской волны в средах с памятью. УМН, т.34, вып.1, 1979.

Победря 1995: Б.Е. Победря. Численные методы в теории упругости и пластичности, Москва: изд-во Московского университета, 1995.

Работнов 1977: Ю.Н.Работнов. Элементы наследственной механики твердых тел, Москва: „Наука“, 1977.

Хермандер 1965: Л.Хермандер. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва, изд-во “Наука”, 1965.

Mathematical Physics

The Equation of Motion for a Three-Dimensional Fractional Model of Viscoelasticity

Teimuraz Surguladze

Akaki Tsereteli State University
Kutaisi, Georgia
teimuraz.surguladze@atsu.edu.ge

Over the past 4 decades, the differential equations of fractional order and the Abel integral equations have been considered to be the very important and useful tools for studying the hereditary and memorable properties of various processes. In some cases they lead us to the more adequate models as compared to the models based on an entire order of derivatives. In the main, the focus was on the study of models based on the fractional diffusion-wave differential equations. Such equations have been successfully used for the modeling of various phenomena, for example, for studying the behavior of viscoelastic materials and for studying the diffusion processes in porous regions that appear in fractal geometry, as well as for white noise process modeling, and so on. This article addresses the equation of motion for a three-dimensional fractional model of viscoelastic behavior, when the constitutive relationships contain the derivatives of fractional order, in Riemann- Liouville sense. The hyperbolicity of the obtained equations of motion is shown.

Keywords: Viscoelasticity; derivative of fractional order; hyperbolicity of equations.

1. Introduction. Let us first introduce some definitions that we are going to use in this article.

Definition 1. Assume that $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ is any differential operator with constant or variable coefficients, linear or non-linear, where $\mathcal{X}$ can be one-

dimensional and finite-dimensional as well. The function $E(t, x)$ is called a fundamental solution for the operator $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, if it satisfies the equation

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)E(t, x) = \delta(t)\delta(x), \quad (1)$$

where δ is a Dirac delta function.

Definition 2. Assume that the operator $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ has a fundamental solution $E(t, x) \in D'$, such that

$$\text{supp } E(t, x) \subset \{(t, x) | t \geq \text{const}|x|\}, \quad \text{const} > 0, \quad (2)$$

where D' is a set of distributions, then the operator $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ is called hyperbolic in D' .

Definition 3. Let S' is space of tempered distributions. Assume that the operator $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ has a fundamental solution $E(t, x)$ such that $e^{-Mt}E(t, x) \in S'$ for any number $M > 0$. Then the operator $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ is called hyperbolic in S' .

Definition 4. The function $\Phi(t)$, which is 0, when $t < 0$, and when $t > 0$ satisfies the following 4 conditions:

1. $\Phi(t)$ is fourfold differentiable;
2. $(-1)^k \frac{d^k \Phi(t)}{dt^k} \geq 0, k = 0, 1, 2, 3;$
3. $\Phi(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow 0+;$
4. There is in existence such $\alpha \in (0, 1)$, that the function $t^\alpha \Phi(t)$ is an increasing one for small t ,

is called function of hyperbolicity.

Assume that $\lambda \in R^1, \sigma \in R^m$. A homogeneous polynomial $P(\lambda, \sigma)$ of order m is called hyperbolic with respect to a variable λ , if for every σ , the equation $P(\lambda, \sigma) = 0$ has m real roots $\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma), \dots, \lambda_m(\sigma)$.

It has been known that a homogeneous differential operator is hyperbolic in D' , when and only when its symbol is hyperbolic.

The polynomial $P(\lambda, \sigma)$ is called strictly hyperbolic, if all roots $\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma), \dots, \lambda_m(\sigma)$ of $\sigma \neq 0$ are different. In that event, the operator $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ is called strictly hyperbolic.

Definition 5. The set

$$\{\lambda, \sigma | P(\lambda, \sigma) = 0\} \subset R^1 \times R^m \quad (3)$$

is called a cone of normal of the operator P . The complement of (3), which contains a semi-axis $\lambda > 0$ is called a core point of the normal of the operator P , and it is denoted by $\overset{\circ}{N}$. It has been known that the core point of a cone of normal of a hyperbolic operator is convex.

Definition 6. The operator P is called an operator with a bounded surface of normal, if the cone (3) of its normal and hyperplane $\lambda = 0$ cross each other only at the origin. If not, the operator is called an operator with an unbounded surface of normal.

Let us introduce the notation

$$\overset{\circ}{K} = \left\{ t, x | t\lambda + x \cdot \sigma \geq 0, (\lambda, \sigma) \in \overset{\circ}{N} \right\} \subset R^1 \times R^m, \quad (4)$$

where $x \cdot \sigma$ denotes the scalar product of x and σ .

The cone $\overset{\circ}{K}$ is called the cone of spread of the operator P , and it coincides with a convex envelope of the carrier of a fundamental solution E_p of the operator P , which describes the spread of disturbance at a finite speed.

Let us introduce the notions of the integral and derivative of fractional order, in a Riemann-Liouville sense:

Definition 7. Assume that the function $f(x)$ is defined in a semiopen interval $(a, b]$, and assume that $\alpha > 0$, then the fractional integral of α order of a function $f(x)$ at a point $x \in (a, b]$ shall be determined as follows:

$${}_a D_x^{-\alpha} f(x) = J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (5)$$

In this formula, Γ denotes the Euler gamma-function

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (6)$$

Assume that $0 \leq m-1 < \alpha \leq m$, $m = 1, 2, 3, \dots$, then the fractional derivative of α order of a function $f(x)$ at a point $x \in (a, b]$ shall be determined as follows

$${}_a D_x^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right] \quad (7)$$

2. The equation of motion. Assume that the constitutive relationship the three-dimensional model of viscoelasticity, containing the derivative of fractional order, in the Riemann-Liouville sense, shall be written as follows:

$$s_{ij}(t) + b_G^{\alpha_G} D^{\alpha_G} s_{ij}(t) = 2G_\infty e_{ij}(t) + 2Gb_G^{\alpha_G} D^{\alpha_G} e_{ij}(t), \quad 0 < \alpha_G < 1 \quad (8)$$

$$\sigma_{kk}(t) = 3K\varepsilon_{kk}(t) \quad (9)$$

In these equations, $s_{ij}(t)$ is a deviator part of the stress tensor $\sigma_{ij}(t)$, $e_{ij}(t)$ is a

deviator part of the strain tensor $\varepsilon_{ij}(t)$; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ is the shear modulus; G_∞ is

the long-term shear modulus; $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ is the expansion modulus; ν is

Poisson's coefficient.

Assume that $\frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}$ is a spherical part of the stress tensor, while $\frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$ is a spherical part of the strain tensor.

From formula (8), we can obtain the direct and inverse relationships, that is to denote s_{ij} by e_{ij} and put it inversely.

We have

$$s_{ij}(t) = 2Ge_{ij}(t) - \frac{2\bar{G}}{b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \right) e_{ij}(t), \quad (12)$$

where

$$\bar{G} = G - G_\infty$$

Analogously, we obtain

$$e_{ij}(t) = \frac{1}{2G} s_{ij}(t) + \frac{\bar{G}}{2G^2 b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{G_\infty}{G b_G^{\alpha_G}} \right) \quad (13)$$

Note that the following relationships are true.

$$D^\beta I_\alpha^* f(t) = I_\alpha^* D^\beta f(t) = f(t), \quad f(0) = 0 \quad (14)$$

From formulas (9),(10) and (14), we obtain

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) &= s_{ij}(t) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}(t) = \\ &= 2G\varepsilon_{ij}(t) + \left(K - \frac{2G}{3} \right) \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(t) - \frac{2\bar{G}}{b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \right) \left(\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(t) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

From the last formula, we have

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 2G(u_{i,jj} + u_{j,ji}) + \left(K - \frac{2G}{3} \right) u_{k,ki} - \frac{2\bar{G}}{b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \right) \left(u_{i,jj} + u_{j,ji} - \frac{1}{3} u_{k,ki} \right) = \\ &= 2Gu_{i,jj} + \left(K + \frac{4G}{3} \right) u_{j,ji} - \frac{2\bar{G}}{b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \right) \left(u_{i,jj} + \frac{2}{3} u_{j,ji} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

where $u_i, i=1,2,3$ denotes the component of the displacement vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ of a single mass point.

In the absence of the massive forces, the equation of motion is as follows:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (17)$$

where ρ is a density.

If we insert (16) into (17), and if we sum up the result with respect to $i=1,2,3$, we obtain

თ. სურგულაძე

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \frac{2G}{\rho} \Delta \vec{u} - \frac{K + \frac{4G}{3}}{\rho} \text{grad}(\text{div}(\vec{u})) + \\ & + \frac{2\bar{G}}{\rho b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \right) \left(\Delta u + \frac{1}{3} \text{grad}(\text{div}(\vec{u})) \right) = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

Let us present the displacement field in the following form:

$$\vec{u} = \text{grad}(\varphi) + \text{rot}(\vec{\psi}) \quad (19)$$

where φ is a scalar function of coordinates $x = (x_1, x_2, x_3)$ and time t , while $\vec{\psi}$ is a vector function of coordinates and time t .

It is obvious that

$$\text{div}(\vec{u}) = \Delta \varphi$$

because

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{\psi})) = 0$$

for every vector.

If we insert these two last equations into (18), we obtain

$$\begin{aligned} & \text{grad} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \text{rot} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} - \frac{2G}{\rho} (\text{grad} \Delta \varphi + \text{rot} \Delta \vec{\psi}) - \frac{K + \frac{4G}{3}}{\rho} \text{grad} \Delta \varphi + \\ & + \frac{2\bar{G}}{\rho b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \right) \left(\text{grad} \Delta \varphi + \text{rot} \Delta \vec{\psi} + \frac{1}{3} \text{grad} \Delta \varphi \right) = 0 \end{aligned}$$

From this, we obtain the following equation system

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{K + \frac{4G}{3}}{\rho} \Delta \varphi + \frac{5}{3} \frac{2\bar{G}}{\rho b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \right) \Delta \varphi = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} - \frac{2G}{\rho} \Delta \psi_i + \frac{2\bar{G}}{\rho b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \right) \Delta \psi_i = 0, i = 1, 2, 3 \quad (21)$$

Let us introduce the following designations

$$P^{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) = P_0^{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{10\bar{G}}{3\rho b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \right) P_1^{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (22)$$

where

$$P_0^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho} \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \quad (23)$$

$$P_1^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (24)$$

$$P^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = P_0^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{2\bar{G}}{\rho b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{D}_{\alpha_G-1}^* \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}} \right) P_1^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (25)$$

$$P_0^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2G}{\rho} \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2G}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \quad (26)$$

$$P_1^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (27)$$

In these formulas, $t \in R^1$ $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$.

The following theorem ([3]) is true.

Theorem. Assume that M is an operator, whose symbol is

$$M(\lambda, \sigma) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\Phi(\lambda) \right)^s P_s(\lambda, \sigma), \quad (28)$$

where $\Phi(t)$ is a function hyperbolicity.

Assume that P_0 is a strictly hyperbolic operator with a bounded surface of normal. Then, in order to let M be hyperbolic in S' , and conserve this property, at any small real disturbances of coefficients of the operators P_s ; $s = 0, 1, 2, \dots$ it is necessary and sufficient that the following inequality is satisfied

$$k_j(\omega) = \frac{P_1(\lambda, g\omega)}{\lambda \frac{d}{d\lambda} P_0(\lambda, g\omega)} \bigg|_{\lambda=c_j(\omega), g \neq 0} > 0, j = 1, 2, \dots \quad (29)$$

If (29) is satisfied, then $\sup E(t, x) \subseteq \overset{\circ}{K}$ and the equation $E(t, x) = 0$ are not satisfied in any region of a point $Q \in \partial \overset{\circ}{K}$ (where $E(t, x)$ is a fundamental solution of the operator M , describing the spread of disturbance at a finite speed, $\overset{\circ}{K}$ is a cone of spread of the operator P_0).

თ. სურგულაძე

Considering (22), if we compare it with (28), we shall obtain

$$\begin{aligned}
 P_0(\lambda, g\omega) &= P_0^{(0)}(\lambda, \omega g) = \lambda^2 - \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho} g^2 = \\
 &= \left(\lambda - \frac{\sqrt{K + \frac{4}{3}G}}{\sqrt{\rho}} g \right) \left(\lambda + \frac{\sqrt{K + \frac{4}{3}G}}{\sqrt{\rho}} g \right) \\
 P_1(\lambda, g\omega) &= P_1^{(0)}(\lambda, \omega g) = g^2 \quad (30)
 \end{aligned}$$

Let us calculate

$$k_1(\omega) = \frac{g^2}{\lambda \cdot 2\lambda} \Big|_{\lambda = \frac{\sqrt{K + \frac{4}{3}G}}{\sqrt{\rho}} g, g \neq 0} = \frac{g^2}{2 \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho} g^2} = \frac{\rho}{2 \left(K + \frac{4}{3}G \right)} > 0 \quad (31)$$

$$k_2(\omega) = \frac{g^2}{\lambda \cdot 2\lambda} \Big|_{\lambda = -\frac{\sqrt{K + \frac{4}{3}G}}{\sqrt{\rho}} g, g \neq 0} = \frac{\rho}{2 \left(K + \frac{4}{3}G \right)} > 0 \quad (32)$$

Since $\Phi^{(0)}(t) = \frac{10\bar{G}}{3\rho b_G^{\alpha_G}} \mathfrak{A}_{\alpha_G-1} \left(-\frac{1}{b_G^{\alpha_G}}, t \right)$ is a function of hyperbolicity, it follows

from this Theorem and formulas (31) and (32) that the following Theorem is true.

Theorem. The operator (22) is hyperbolic in S' , and it conserves this property at any small real disturbances of coefficients of the operators $P_0^{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ and

$P_1^{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right)$. If $E_3(t, x)$ is a fundamental solution of the operator (22), then

$$\sup E_3(t, x) \subset \mathring{K} = \left\{ (t, x); t \geq \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{K + \frac{4}{3}G}} |x| \right\}$$

and the equation $E_3(t, x) = 0$ is not satisfied in any region of a point $Q \in \partial \mathring{K}$.

Analogously, the correctness of the following Theorem is proved.

Theorem. The operator (25) is hyperbolic in S' , and it conserves this property at any small real disturbances of coefficients of the operators $P_0^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ and

$P_1^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$. If $E_3(t, x)$ is a fundamental solution of the operator (25), then

$$\text{supp } E_3(t, x) \subset \overset{\circ}{K} = \left\{ (t, x); t \geq \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2G}} |x| \right\}$$

and the equation $E_3(t, x) = 0$ is not satisfied in any region of a point $Q \in \partial \overset{\circ}{K}$.

At the end of this work, let us make several conclusions coming out from the results obtained.

Assume that $\vec{\psi} = 0$, then it follows from (25) that $\vec{u} = \text{grad}(\varphi)$, $\text{rot}(\vec{u}) = 0$.

This just shows us that particles rotation does not occur in the wave described by a function φ , that is to say that each of them moves forward. These waves are called longitudinal. By this means, (26) describes the spread of longitudinal waves.

Assume now that $\varphi = 0$, then $\vec{u} = \text{rot}(\vec{\psi})$. In such field, the spatial expansion is equal to 0. Indeed, $\text{div}(\vec{u}) = \text{div} \text{rot}(\vec{\psi}) = 0$. The waves having such properties are called transverse, or the shear waves. That is to say that (21) describes the transverse waves.