

გეომეტრია და ტოპოლოგია

ასიმპტოტურ ზადეთა შესახებ სამგანზომილებიან აფინურ
არასაკუთრივ ჰიპერსიბრტყეში

რაჰდენ ხაზურძანია

აპაქი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო
razhdenkhaburdzania@gmail.com

განიხილება ორგანზომილებიანი V_2 ზედაპირი ოთხგანზომილებიან გაფართოებულ აფინურ $\overline{A}_4 = A_4 \sqcup \Delta_3^*$ სივრცეში, სადაც A_3^* არის სამგანზომილებიანი P_3 პროექციული სივრცის სტრუქტურის მქონე არასაკუთრივ ჰიპერსიბრტყე. V_2 ზედაპირს გარკვეული წესით მიუერთდება მოძრავი რეპერი $R = (A, A_i, A_\alpha)$ ($i=1,2$; $\alpha=3,4$) სადაც $A \in V_2$, $\{A_i, A_\alpha\} \subset A_3^*$. V_2 ზედაპირზე ისე ვირჩევთ გეოდეზიური წირებით შედგენილ შეუღლებულ (ω^1, ω^2) ბადეს, რომ (AA_i) წრფეები წარმოადგენენ ω^i წირებისადმი მხებებს. როცა A წერტილი გადაადგილდება V_2 ზედაპირზე, მაშინ A_i, A_α წერტილებიდან თითოეული A_3^* ჰიპერსიბრტყეში აღწერენ $(A_i), (A_\alpha)$ ორგანზომილებიან ზედაპირებს, რომლებზეც ბუნებრივად აღმოცენდებიან (ω^1, ω^2) წირთა ბადეები. განიხილება ის შემთხვევები, როცა ეს ბადეები იქნებიან ასიმპტოტური ბადეები.

საკვანძო სიტყვები: არასაკუთრივ ჰიპერსიბრტყე, მოძრავი რეპერი, შეუღლებული ბადე, ასიმპტოტური ბადე.

განვიხილოთ ორგანზომილებიანი ზედაპირი V_2 ოთხგანზომილებიან გაფართოებულ აფინურ $\overline{A}_4 = A_4 \sqcup \Delta_3^*$ სივრცეში, სადაც A_3^* არის სამგანზომილებიანი P_3 პროექციული სივრცის სტრუქტურის მქონე არასაკუთრივ ჰიპერსიბრტყე (Базылев 1978: 3).

მივუერთოთ V_2 ზედაპირს მოძრავი რეპერი $R = (A, A_i, A_\alpha)$, $(i = 1, 2; \alpha = 3, 4)$, სადაც $A \in V_2$, $A_i \in T_2(A)$ ($T_2(A)$ არის გაფართოებული მხეხი 2-სიბრტყე V_2 ზედაპირისადმი A წერტილში), A_α წერტილებად კი შერჩეულია $T_2(A)$ -ში არამდებარე ნებისმიერი წერტილები ისე, რომ A_i, A_α წერტილები წარმოდგენენ საერთო მდებარეობის წერტილთა სისტემას A_3^* -ში.

ვთქვათ R რეპერის განმსაზღვრელი A, A_i, A_α წერტილები გაჩენილია $\vec{A}, \vec{A}_i, \vec{A}_\alpha$ ვექტორებით შესაბამისად. მაშინ ასეთი რეპერის დერივაციული ფორმულებია:

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \omega_0^0 \vec{A} + \omega^i \vec{A}_i, \\ d\vec{A}_i &= \omega_i^0 \vec{A} + \omega_i^j \vec{A}_j + \omega_i^\alpha \vec{A}_\alpha, \\ d\vec{A}_\alpha &= \omega_\alpha^0 \vec{A} + \omega_\alpha^i \vec{A}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{A}_\beta, \end{aligned}$$

$(i, j = 1, 2; \alpha, \beta = 3, 4)$ (Фиников 1948).

რადგან A_3^* ჰიპერსიბრტყე უძრავია, ამიტომ

$$\omega_i^0 = \omega_\alpha^0 = 0.$$

V_2 ზედაპირი R რეპერის მიმართ განისაზღვრება

$$\omega^\alpha = 0$$

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით და ω^i ფორმები წარმოადგენენ მთავარ ფორმებს (მთავარი პარამეტრების დიფერენციალების წრფივ ფორმებს, რომლებიც გადაადგილებენ A წერტილს V_2 ზედაპირზე).

ამ სისტემის გაგრძელებით და კარტანის ლემის გამოყენებით ვღებულობთ:

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \quad (b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha).$$

$(i, j = 1, 2; \alpha = 3, 4)$. მაშასადამე, ω_i^α მთავარი ფორმებია (Хабурдзания 1981: 137).

თუ V_2 ზედაპირზე მოცემული გვაქვს $\Sigma_2 = (\omega^1, \omega^2)$ წირთა შეუღლებული ბადე და (AA_i) წრფეები წარმოადგენენ მხეხებს ω^i წირებისადმი $A \in V_2$ წერტილში, მაშინ ω_i^j ფორმები მთავარია და

$$\omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k, \quad (i \neq j; i, j, k = 1, 2).$$

რ. ხაბურძანია

ამას გარდა,

$$b_{ij}^\alpha = 0, (i \neq j)$$

(Базылев 1966: 9).

ცნობილია, რომ თუ ზედაპირი $V_p \subset P_n$ და ამ ზედაპირზე არსებობს შეუღლებული ბადე Σ_p , მაშინ V_p ზედაპირის ყოველი ნორმალიზაცია მასზე გააჩენს აფინურ ბმულობას. თუ შეუღლებული Σ_p ბადე ამ ბმულობაში აღმოჩნდება გეოდეზიური ბადე, მაშინ მივიღებთ:

$$a_{11}^4 = 0, b_{11}^4 = 0, a_{22}^1 = 0, b_{22}^3 = 0.$$

ვთქვათ A წერტილი გადაადგილდება V_2 ზედაპირზე, რომელზეც წირთა $\Sigma_2 = (\omega^1, \omega^2)$ ბადე არის შეუღლებული და გეოდეზიური (Базылев 1974: 189). A_i, A_α წერტილებიდან თითოეული A_3^* ჰიპერსიბრტყეში, ზოგად შემთხვევაში, აღწერენ $(A_i), (A_\alpha)$ ორგანოზომილებიან ზედაპირებს, რომლებზეც ბუნებრივად აღმოცენდებიან (ω^1, ω^2) წირთა ბადეები. (A_i, A_α) წერტილები აღწერენ ω^j წირს $(A_i), (A_\alpha)$ ზედაპირზე, როცა A წერტილი V_2 ზედაპირზე გადაადგილდება ω^j წირის გასწვრივ, $i, j = 1, 2; \alpha = 3, 4$).

გავარკვიოთ $(A_i), (A_\alpha)$ ზედაპირებიდან თითოეულზე წირთა (ω^1, ω^2) ბადე როდის იქნება ასიმპტოტური ბადე. (წირთა (ω^1, ω^2) ბადეს ეწოდება ასიმპტოტური, თუ ის შედგენილია ასიმპტოტური წირების ორი ოჯახით).

განვიხილოთ (A_1) ზედაპირი.

$$d\vec{A}_1 = \omega_1^1 \vec{A}_1 + \omega_1^2 \vec{A}_2 + \omega_1^3 \vec{A}_3 + \omega_1^4 \vec{A}_4 = \omega_1^1 \vec{A}_1 + a_{12}^2 \omega^2 \vec{A}_2 + b_{11}^3 \omega^1 \vec{A}_3.$$

მაშასადამე, ω^1 წირი (A_1) ზედაპირზე ეხება $(A_1 A_3)$ წრფეს A_1 წერტილში, ხოლო ω^2 წირი კი - $(A_1 A_2)$ წრფეს იმავე A_1 წერტილში. ე.ი. $(A_1 A_2 A_3)$ სიბრტყე წარმოადგენს (A_1) ზედაპირისადმი მხებ სიბრტყეს A_1 წერტილში, ხოლო $(A_1 A_4)$ წრფე ამ ზედაპირისადმი არის პირველი გვარის ნორმალი. (ზედაპირისადმი მოცემულ წერტილში პირველი გვარის ნორმალი ეწოდება წრფეს, რომელიც არ მდებარეობს ზედაპირისადმი ამ წერტილში გავლებულ მხებ სიბრტყეში (Норден 1976). ამიტომ ამ ზედაპირზე აღმოცენდება ასიმპტოტური ფორმა:

$$\Phi_1 = \omega^1 \omega_3^4 + \omega^2 \omega_2^4.$$

როგორც ცნობილია $\Phi_1 = 0$ წარმოადგენს ასიმპტოტური ბადის წირთა ორი ოჯახის დიფერენციალურ განტოლებას. რადგან $\omega_2^4 = b_{22}^4 \omega^2$ და $\omega_3^4 = s\omega^1$, მოცემულ შემთხვევაში ვღებულობთ:

$$s(\omega^1)^2 + b_{22}^4 (\omega^2)^2 = 0.$$

ბადე იქნება ნამდვილი, თუ $\frac{b_{22}^4}{s} = -a^2$.

გვექნება:

$$(\omega^1)^2 - a^2 (\omega^2)^2 = 0.$$

მაშასადამე, $\omega^1 + a\omega^2 = 0$ ასიმპტოტურ წირთა ერთი ოჯახია, ხოლო $\omega^1 - a\omega^2 = 0$ - მეორე ოჯახი.

ანალოგიურად (A_2) ზედაპირზეც ვღებულობთ ასიმპტოტურების ორ ოჯახს.

A_3 და A_4 წერტილები შევუთავსოთ $(A_1 A_3)$ და $(A_2 A_4)$ წრფეების მეორე ფოკუსებს შესაბამისად. ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} \omega_3^4 &= h\omega_3^2, \quad \omega_4^3 = k\omega_4^1, \quad \omega_3^4 = t\omega^2, \quad \omega_3^1 = q\omega^1 + r\omega^2, \\ \omega_4^2 &= u\omega^1 + v\omega^2, \quad \omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^2 = \bar{h}\omega_3^4, \quad \omega_3^4 = s\omega^1. \end{aligned}$$

(ხაბურძანია 2017:226).

ჩავთვალოთ, რომ ეს პირობები შესრულებულია.

განვიხილოთ (A_3) ზედაპირი.

$$d\vec{A}_3 = \omega_3^3 \vec{A}_3 + \omega_3^1 \vec{A}_1 + \omega_3^2 \vec{A}_2 + \omega_3^4 \vec{A}_4 = \omega_3^3 \vec{A}_3 + (q\omega^1 + r\omega^2) \vec{A}_1 + \omega_3^2 (\vec{A}_2 + h\vec{A}_4)$$

მივიღეთ, რომ სიბრტყე, რომელიც გადის A_3, A_1 წერტილებზე და $\vec{A}_2 + h\vec{A}_4$

ვექტორით გაჩენილ წერტილზე ეხება (A_3) ზედაპირს A_3 წერტილში.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

- 1) მიღებული სიბრტყე ემთხვევა $(A_3 A_1 A_2)$ სიბრტყეს. ეს მოხდება მაშინ, როცა $h = 0$.

$$\omega_3^4 = 0.$$

გავაგრძელოთ ეს თანაფარდობა, გამოვიყენოთ კარტანის ლემა (Картан 1949) და მივიღებთ, რომ

$$\omega_3^2 = c\omega^2.$$

რ. საბურძანია

ამ შემთხვევაში ω^1 წირი ეხება $(A_3 A_2)$ წრფეს, ხოლო ω^2 წირი კი, - $(A_3 A_1)$ წრფეს A_3 წერტილში. პირველი გვარის ნორმალური იქნება $(A_3 A_4)$ წრფე. (A_3) ზედაპირზე ასიმპტოტური ბადის დიფერენციალურ განტოლებას ექნება სახე:

$$\Phi_3 = \omega^1 \omega_2^4 + \omega^2 \omega_1^4 = 0.$$

რადგან $\omega_2^4 = b_{22}^4 \omega^2$ და $\omega_1^4 = 0$ ვღებულობთ:

$$b_{22}^4 \omega^1 \omega^2 = 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\omega^1 = 0$ ან $\omega^2 = 0$. მაშასადამე ω^1 და ω^2 წირები ასიმპტოტურებია.

განვიხილოთ A_3 და A_1 წერტილების გადაადგილება ω^1 წირის გასწვრივ (ე.ი. $\omega^2 = 0$).

$$d\vec{A}_3 = \omega_3^3 \vec{A}_3 + q \omega^1 \vec{A}_1,$$

$$d\vec{A}_1 = \omega_1^1 \vec{A}_1 + b_{11}^1 \omega^1 \vec{A}_3.$$

მაშასადამე, როცა A_1 წერტილი (A_1) ზედაპირზე აღწერს ω^1 წირს, ან როცა A_3 წერტილი (A_3) ზედაპირზე აღწერს ω^1 წირს, მაშინ $(A_1 A_3)$ წრფე უძრავია. ამ შემთხვევაში (A_1) ზედაპირზე ასიმპტოტური ფორმა ღებულობს სახეს:

$$\Phi'_3 = \omega^1 \omega_3^4 + \omega^2 \omega_2^4 = b_{22}^4 (\omega^2)^2.$$

ეს ნიშნავს, რომ (A_1) ზედაპირი არის განფენადი, ხოლო $(A_1 A_3)$ წრფე მისი წრფივი მსახველია და (A_3) ზედაპირი ემთხვევა (A_1) ზედაპირს.

2) $d\vec{A}_3$ შეიძლება ასეც ჩავწეროთ:

$$d\vec{A}_3 = \omega_3^3 \vec{A}_3 + (q\omega^1 + r\omega^2) \vec{A}_1 + \omega_3^4 (\vec{h} A_2 + \vec{A}_4).$$

ვთქვათ $\vec{h} = 0$. მაშინ $\omega_3^2 = 0$. ამ თანაფარდობის გაგრძელებით და კარტანის ლემის გამოყენებით ვღებულობთ

$$(a_{12}^2 q + sv) \omega^1 \wedge \omega^2 = 0.$$

რადგან ω^1 და ω^2 ფორმები წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ

$$a_{12}^2 q + sv = 0.$$

ამ შემთხვევაში $(A_3 A_1 A_4)$ სიბრტყე ეხება (A_3) ზედაპირს A_3 წერტილში. ω^1 წირისადმი $(A_3 A_4)$ წრფე მხებია, ხოლო ω^2 წირისადმი $(A_3 A_1)$ წრფეა მხები. $(A_3 A_2)$ წრფე წარმოადგენს პირველი რიგის ნორმალს (A_3) ზედაპირისადმი A_3 წერტილში.

$$\Phi_3'' = \omega^1 \omega_4^2 + \omega^2 \omega_1^2 = 0$$

განტოლება იქნება ასიმპტოტური ბადის დიფერენციალური განტოლება (A_3) ზედაპირზე.

რადგან

$$\omega_4^2 = u\omega^1 + v\omega^2, \quad \omega_1^2 = a_{12}^2 \omega^2,$$

ამიტომ ასიმპტოტურ წირთა ორი ოჯახის განტოლება ღებულობს სახეს:

$$u(\omega^1)^2 + v\omega^1 \omega^2 + a_{12}^2 (\omega^2)^2 = 0.$$

ანალოგიურად განიხილება (A_4) ზედაპირის შემთხვევა, რა დროსაც ვღებულობთ, რომ, როცა

$$a_{21}^1 v + tq = 0,$$

მაშინ $(A_4 A_2 A_3)$ სიბრტყე წარმოადგენს მხებ სიბრტყეს (A_4) ზედაპირისადმი A_4 წერტილში. ω^1 წირისადმი მხებია $(A_4 A_2)$ წრფე, ხოლო ω^2 წირისადმი $(A_4 A_3)$ წრფეა მხები. ზედაპირისადმი პირველი გვარის ნორმალს წარმოადგენს $(A_4 A_1)$ წრფე და ასიმპტოტურების ორი ოჯახის განტოლება ღებულობს სახეს:

$$a_{21}^1 (\omega^1)^2 + r(\omega^2)^2 + q\omega^1 \omega^2 = 0.$$

ცალკე განვიხილოთ შემთხვევა, როცა

$$\begin{cases} a_{12}^2 q + sv = 0 \\ tq + a_{21}^1 v = 0 \end{cases}$$

ა) q და v ერთდროულად ნულის ტოლია. მაშინ

$$\omega_3^1 = r\omega^2, \quad \omega_4^2 = u\omega^1.$$

ამ შემთხვევაში $\mathcal{Q}$ ფოკუსური წირის განტოლება (ხაბურძანია 2017: 226) ღებულობს სახეს:

$$(y^0)^2 = 0,$$

რ. ხაბურძანია

ამიტომ ის თანმთხვეულ წრფეთა წყვილი ხდება, გადის A_3 და A_4 წერტილებზე და მისი პოლუსი ემთხვევა (A_3A_4) წრფის პოლუსს (Розенфельд 1956).

ამ შემთხვევაში (A_3) ზედაპირზე ასიმპტოტურების ორი ოჯახის განტოლება ღებულობს სახეს

$$u(\omega^1)^2 + a_{12}^2(\omega^2)^2 = 0.$$

ბადა იქნება ნამდვილი, როცა $\frac{a_{12}^2}{u} = -c^2$.

$\omega^1 + c\omega^2 = 0$ ასიმპტოტურების ერთი ოჯახის განტოლებაა, ხოლო $\omega^1 - c\omega^2 = 0$, - კი მეორე ოჯახის განტოლება.

ანალოგიურად, (A_4) ზედაპირზე მივიღებთ ასიმპტოტურების ორი ოჯახის განტოლებას.

ბ) q და v ერთდროულად ნულის არატოლია. მაშასადამე

$$\begin{vmatrix} a_{12}^2 & s \\ t & a_{21}^1 \end{vmatrix} = 0,$$

საიდანაც $a_{12}^2 = \mu t$, $s = \mu \omega_4^3$. მაშასადამე

$$\omega_3^4 = \mu \omega_2^1, \quad \omega_1^2 = \mu \omega_4^3.$$

ამ სისტემების გაგრძელებით და კარტანის ლემის გამოყენებით ვღებულობთ

$$st = a_{12}^2 \cdot a_{21}^1.$$

ამ დროს:

1) (A_1) ზედაპირზე ასიმპტოტურების ოჯახის განტოლება ღებულობს სახეს:

$$b_{22}^4(\omega^2)^2 = 0$$

ე.ი. (A_1) ზედაპირი გადაგვარდება, ხოლო (A_3) ზედაპირზე ასიმპტოტურების ოჯახის განტოლებაა

$$\omega^1(u\omega^1 + v\omega^2) = 0.$$

მაშასადამე $\omega^1 = 0$ ასიმპტოტურების ერთი ოჯახია, ხოლო $u\omega^1 + v\omega^2 = 0$, - კი მეორე ოჯახი. ამ დროს (A_2) და (A_4) ზედაპირებზე ასიმპტოტურები არ იცვლებიან.

2) ანალოგიურად (A_2) ზედაპირი გადაგვარდება, რადგან ასიმპტოტურების ოჯახის განტოლება დებულობს სახეს

$$b_{11}^3(\omega^1)^2 = 0,$$

ხოლო (A_3) ზედაპირზე ასიმპტოტურების ოჯახებს ექნებათ იგივე განტოლებები, რაც წინა შემთხვევაში. (A_1) და (A_4) ზედაპირებზე კი ასიმპტოტურები არ შეიცვლებიან.

3) (A_1) და (A_2) ზედაპირები ერთდროულად გადაგვარდებიან. ამ შემთხვევას კი არ განვიხილავთ.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება:

თეორემა. ვთქვათ ოთხგანზომილებიან გაფართოებულ აფინურ $\overline{A_4} = A_4 \sqcup \Delta_3^*$ სივრცეში მოთავსებულ ორგანზომილებიან V_2 ზედაპირზე წირთა (ω^1, ω^2) ბადე შეუღლებული და გეოდეზიურია. მაშინ ამ ზედაპირისადმი გარკვეული წესით მიერთებული მოძრავი R რეპერის წვეროები არასაკუთრივ ჰიპერსიბრტყეში მიღებულ ზედაპირებზე აღწერენ ასიმპტოტური წირების ორ ოჯახს.

ლიტერატურა

ხაბურძანია 2017: რ. ხაბურძანია. ერთი ფოკუსური წირის შესახებ სამგანზომილებიან აფინურ არასაკუთრივ ჰიპერსიბრტყეში. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მთაბე, №2(10), ქუთაისი, 2017.

Базылев 1965: Базылев В.Т. О многомерных сетях и их преобразованиях. Сб. „Геометрия, 1963 (Итоги науки ВИНТИ АН СССР). М. 1965.

Базылев 1966: Базылев В.Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства. Известия высших учебных заведений. Математика, №2(51), 1966.

Базылев 1974: Базылев В.Т. Сети на многообразиях. Труды геометрического семинара. ВИНТИ, том 6, 1974.

Базылев 1978: Базылев В.Т. К геометрии сетей в расширенном пространстве. Сб. „Геометрия погруженных подмногообразий“. М. 1978.

Норден 1976: Норден А.П. Пространства аффинной связности. Наука. М. 1976.

Картан 1949: Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. Изд. Иностран. Лит. М. 1949.

Розенфельд 1956: Розенфельд Б.А. Неэвклидовы геометрии. М. Гостехиздат, 1956.

Фиников 1948: Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М. –Л. Гостехиздат, 1948.

Хабурдзания 1981: Хабурдзания Р.Т. О сопряженных сетях в расширенном пространстве. Сб. „Современная геометрия“. Л. 1981.

Geometry and Topology

Asymptotic Nets in the Improper Three-dimensional Affine Hyperplane

Razhden Khaburdzania

Akaki Tsereteli State University
Kutaisi, Georgia
razhdenkhaburdzania@gmail.com

The two – dimensional surface V_2 is considered in the four-dimensional extended affine space $\overline{A}_4 = A_4 \sqcup A_3^*$, where A_3^* is a three-dimensional improper hyperplane carrying the structure of the projective space P_3 . A moving frame $R = (A, A_i, A_\alpha)$ ($i = 1, 2; \alpha = 3, 4$) is attached to the surface V_2 according to a certain rule, where $A \in V_2, \{A_i, A_\alpha\} \subset A_3^*$. We choose a conjugated net (ω^1, ω^2) arranged by geodesic lines on the surface V_2 so that the straight lines (AA_i) represent tangent to the lines ω^i . When the point A moves on the surface V_2 then each of the points A_i, A_α describes two-dimensional surfaces $(A_i), (A_\alpha)$ in the hyperplane A_3^* , on which naturally arise nets of lines (ω^1, ω^2) . The cases when the nets are asymptotic are considered.

Keywords: Improper Hyperplane, Moving Frame, Conjugated Net, Asymptotic Net.

Let us consider the two-dimensional surface V_2 in the four-dimensional extended affine space $\overline{A}_4 = A_4 \sqcup \Delta_3^*$, where A_3^* is a three-dimensional improper hyperplane carrying the structure of the projective space P_3 .

To the surface V_2 we attach a moving frame $R = (A, A_i, A_\alpha)$, ($i = 1, 2$; $\alpha = 3, 4$), where $A \in V_2$, $A_i \in T_2(A)$ ($T_2(A)$ is the extended tangential 2-plane to the surface V_2 at the point A), $A_\alpha \notin T_2(A)$, $\{A_i, A_\alpha\} \subset A_3^*$.

Let the determinative points A, A_i, A_α , of the frame R be generated by the vectors $\vec{A}, \vec{A}_i, \vec{A}_\alpha$ respectively. The derivation formulas for the frame have the form:

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \omega_0^\theta \vec{A} + \omega_i^\tau \vec{A}_i, \\ d\vec{A}_i &= \omega_i^\theta \vec{A} + \omega_i^\tau \vec{A}_j + \omega_i^\sigma \vec{A}_\alpha, \\ d\vec{A}_\alpha &= \omega_\alpha^\theta \vec{A} + \omega_\alpha^\tau \vec{A}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{A}_\beta, \end{aligned}$$

($i, j = 1, 2$; $\alpha, \beta = 3, 4$).

Since the plane A_3^* is immobile then $\omega_i^0 = \omega_\alpha^0 = 0$. The surface V_2 is defined by the system of differential equation $\omega^\alpha = 0$ to the frame R and the forms ω^i are the main forms.

The continuation of the system and the use of a Cartan lemma can be given in the following way:

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^\alpha, \quad (b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha), \quad (i, j = 1, 2; \alpha = 3, 4).$$

Consequently ω_i^α are main forms.

If the conjugated net of lines (ω^1, ω^2) is given on the surface V_2 and if the straight lines (AA_1) are tangents to the lines ω^i at the point $A \in V_2$ then the forms ω_i^j are main and

$$\omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k$$

($i \neq j$; $i, j, k = 1, 2$), besides b_{ij}^α , ($i \neq j$).

Let us say that the point A moves on the surface V_2 where the net of lines (ω^1, ω^2) is conjugated and geodesic. In the general case, each of the points

A_i, A_α describes two-dimensional surfaces $(A_i), (A_\alpha)$ in the hyperplane A_3^* on which the nets of lines (ω^1, ω^2) arise.

Let us define the case when the net of lines (ω^1, ω^2) is asymptotic on each surfaces $(A_i), (A_\alpha)$. (The net of lines (ω^1, ω^2) is called asymptotic on the surface in case it is formed by two families of asymptotic lines).

Let us examine the surface (A_1) .

$$d\vec{A}_1 = \omega_1^1 \vec{A}_1 + \omega_1^2 \vec{A}_2 + \omega_1^3 \vec{A}_3 + \omega_1^4 \vec{A}_4 = \omega_1^1 \vec{A}_1 + a_{12}^2 \omega^2 \vec{A}_2 + b_{11}^3 \omega^1 \vec{A}_3.$$

Consequently the line ω^1 touches the straight line $(A_1 A_3)$ on the surface at the point A_1 while the line ω^2 touches the straight line $(A_1 A_2)$ at the same point. So, the plane $(A_1 A_2 A_3)$ represents a tangent plane to the surface (A_1) at the point A_1 and the straight line $(A_1 A_4)$ is the first kind normal to this surface. (The first kind normal, to the surface at the given point, is called a straight line that does not belong to the tangent plane gone through the point mentioned above). An asymptotic form:

$$\Phi_1 = \omega^1 \omega_3^4 + \omega^2 \omega_2^4.$$

arises on the surface.

As it is known $\Phi_1 = 0$ represents a differential equation of an asymptotic net and two families of lines. In this case we have the following formulas: $\omega_2^4 = b_{22}^4 \omega^2$ and $\omega_3^4 = s \omega^1$ and we get:

$$s(\omega^1)^2 + b_{22}^4 (\omega^2)^2 = 0.$$

A net is real if $\frac{b_{22}^4}{s} = -a^2$. Then we have

$$(\omega^1)^2 - a^2 (\omega^2)^2 = 0.$$

Therefore, $\omega^1 + a\omega^2 = 0$ is the first family of asymptotic lines and $\omega^1 - a\omega^2 = 0$ - the second one.

Similarly we get two families of asymptotic lines at the point A_2 as well.

If we coincide the points A_3 and A_4 to the second focuses of the straight lines $(A_1 A_3)$ and $(A_2 A_4)$ then we have the following forms:

$$\begin{aligned}\omega_3^4 &= h\omega_3^2, \quad \omega_4^3 = k\omega_4^1, \quad \omega_3^4 = t\omega^2, \quad \omega_3^1 = q\omega^1 + r\omega^2, \\ \omega_4^2 &= u\omega^1 + v\omega^2, \quad \omega_1^4 = 0, \quad \omega_3^2 = \bar{h}\omega_3^4, \quad \omega_3^4 = s\omega^1.\end{aligned}$$

Let's suppose that these cases are fulfilled.

If we examine the surface (A_3) ,

$$d\vec{A}_3 = \omega_3^3 \vec{A}_3 + \omega_3^1 \vec{A}_1 + \omega_3^2 \vec{A}_2 + \omega_3^4 \vec{A}_4 = \omega_3^3 \vec{A}_3 + (q\omega^1 + r\omega^2) \vec{A}_1 + \omega_3^2 (\vec{A}_2 + h\vec{A}_4)$$

we get the plane that goes through the points A_3, A_1 and $\vec{A}_2 + h\vec{A}_4$ generated by a vector and it touches the surface (A_3) at the point A_3 .

Now let's consider two cases:

1) In case the plane $(A_3 A_1 A_2)$ coincides with the received one, then an equation of an asymptotic net on the surface (A_3) is:

$$\Phi_3 = b_{22}^4 (\omega^2)^2 = 0.$$

This means that the surface (A_4) is developable, the straight line $(A_1 A_3)$ is its formative and the surface (A_3) coincides with the surface (A_1) .

2) $d\vec{A}_3$ can be written as follows:

$$d\vec{A}_3 = \omega_3^3 \vec{A}_3 + (q\omega^1 + r\omega^2) \vec{A}_1 + \omega_3^2 (h\vec{A}_2 + \vec{A}_4).$$

Based on the conducted calculations we get the following equation of two families of asymptotic lines:

$$u(\omega^1)^2 + v\omega^1\omega^2 + a_{12}^2 (\omega^2)^2 = 0.$$

We can similarly examine the case of the surface (A_4) . When

$$a_{21}^1 (\omega^1)^2 + r(\omega^2)^2 + q\omega^1\omega^2 = 0,$$

it represents an equation of two families of the asymptotics, on the surface (A_4) .

Thus, we have proved the following result:

Theorem. Let the net of lines (ω^1, ω^2) —that belongs to the two-dimensional surface V_2 in the four-dimensional extended affine space $\bar{A}_4 = A_4 \sqcup \Delta_3^*$ —is conjugated and geodesic. Then the vertexes of the moving frame R , that are attached to the surface according to a certain rule, describe two families of asymptotical lines to the represented surfaces in the improper hyperplane.