

მათემატიკური ფიზიკა

მომენტური დრეკადობის თეორიის სტატიკის პირველი
ბრტყელი შიგა სასაზღვრო ამოცანის ვარიაციული მეთოდით
ამოხსნის შესახებ

კოსტა სვანაძე

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი საქართველო
kostasvanadze@yahoo.com

ნაშრომში მომენტური დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებისათვის, მარტივადბმული ბრტყელი სასრული არის შემთხვევაში, ვარიაციული მეთოდით ამოხსნილია სასაზღვრო ამოცანა, როცა არის საზღვარზე მოცემულია გადაადგილების ვექტორი და ბრუნვა.

საკვანძოსიტყვები: მომენტური დრეკადობის თეორიის სტატიკის პირველი შიგა სასაზღვრო ამოცანა, ვარიაციული მეთოდი, ფუნქციონალი, მამინიმიზირებელი ვექტორ-ფუნქცია.

10. მომენტური დრეკადობის თეორიის სტატიკის ერთგვაროვან განტოლებას ორი განზომილების შემთხვევაში მატრიცული ფორმით აქვს შემდეგ სახე (Башелеишвили 1969: 41-44)

$$A(\partial x, \nu)u(x) = 0, \quad (1)$$

სადაც

$$A(\partial x, \nu) = [A_{kj}(\partial x, \nu)]_{2 \times 2},$$

$$A_{kj}(\partial x, \nu) = \delta_{kj} \Delta (\mu - \nu \Delta) + (\lambda + \mu + \nu \Delta) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}, \quad k, j = 1, 2,$$

$u = (u_1, u_2)^T$ გადაადგილების ვექტორია, Δ ლაპლასის ოპერატორია, δ_{kj} კრონეკერის სიმბოლოა, λ, μ და ν დრეკადი მუდმივებია. აღნიშნული მუდმივები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს

$$\mu > 0, \quad \nu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0. \quad (2)$$

ვთქვათ, D^+ მარტივადბმული სასრული ორგანზომილებიანი არეა, რომლის საზღვარი S შეკრული, $C^{2\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ კლასის წირია. $D^+ = D^+ \cup S$.

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (1) განტოლების რეგულარული $u = (u_1, u_2)^T$ ამონახსნი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$u \in C^1(\overline{D^+}) \cap C^0(D^+), \quad \omega = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \in C^0(\overline{D^+}) \cap C^1(D^+).$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ D^+ არეში რეგულარული $u = (u_1, u_2)^T$ და $V = (V_1, V_2)^T$ ვექტორ-ფუნქციებისათვის ადგილი აქვს გრინის შემდეგ ფორმულას (Сваниძე 1978: 159-165)

$$\int_{D^+} [V(x) A(\partial x, \nu) u(x) + E(V, u, \nu)] dx = \int_S [LV(y)]^+ [Tu(y)]^+ dy S,$$

სადაც

$$LV(y) = L(\partial y) V(y) = \left[V_1(y), V_2(y), \frac{\partial V_2}{\partial y_1} - \frac{\partial V_1}{\partial y_2} \right]^T,$$

$$Tu(y) = T(\partial y, \nu, n(y)) u(y) = \left[\tau_1, \tau_2, \nu \frac{\partial}{\partial n(y)} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_1} - \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right) \right]^T,$$

$$\tau_1 = 2\mu \frac{\partial u_1(y)}{\partial n(y)} + \lambda n_1(y) \operatorname{div} u(y) + (\nu \Delta + \mu) n_2(y) \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_1} - \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right),$$

$$\tau_2 = 2\mu \frac{\partial u_2(y)}{\partial n(y)} + \lambda n_2(y) \operatorname{div} u(y) - (\nu \Delta + \mu) n_1(y) \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_1} - \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial n(y)} = n_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial y_2},$$

$n(y) = (n_1(y), n_2(y))^T$ S წირისადმი $y = (y_1, y_2)$ წერტილში გავლებული გარე ნორმალის შესაბამისი ერთეულოვანი ვექტორია;

$$\begin{aligned} E(V, u, \nu) &= E(u, V, \nu) = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \operatorname{div} u \operatorname{div} V + \\ &+ \frac{1}{2} \mu \sum_{p \neq q}^2 \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right) \left(\frac{\partial V_p}{\partial x_q} + \frac{\partial V_q}{\partial x_p} \right) + \\ &+ \frac{1}{3} \mu \sum_{p, q}^2 \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_p} - \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \right) \left(\frac{\partial V_p}{\partial x_p} - \frac{\partial V_q}{\partial x_q} \right) + \\ &+ \nu \sum_{p=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

(3) დან როცა $V = u$ გვაქვს

კ. სვანაძე

$$\int_{D^+} [u(x)A(\partial x, v)u(x)dx + E(u, u, v)]dx = \int_S [Lu(y)]^+ [Tu(y)]^+ d_y S, \quad (5)$$

სადაც

$$E(u, u, v) = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} |\operatorname{div} u|^2 + \frac{1}{2} \mu \sum_{p \neq q}^2 \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right)^2 + \frac{1}{3} \mu \sum_{p, q}^2 \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_p} - \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \right)^2 + \nu \sum_{p=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right]^2 \quad (6)$$

(6)-დან ნათლად ჩანს რომ $E(u, u, v)$ დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა. ამასთან $E(u, u, v) = 0$ განტოლების ამონახსნია

$$u_1(x) = b_1 - ax_2, \quad u_2(x) = b_2 + ax_1,$$

სადაც a , b_1 და b_2 ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია.

ახლა განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$\Pi(u, v) = \int_{D^+} E(u, u, v) dx, \quad (7)$$

სადაც $E(u, u, v)$ განსაზღვრულია (6)-ით. ზემო აღნიშნულიდან ცხადია, რომ (7) დადებითად განსაზღვრული ფუნქციონალია.

2^o. ნაშრომში განიხილება შემდეგი ამოცანა

D^+ არეში ვიპოვოთ (1) განტოლების ისეთი $u(u_1, u_2)^T$ რეგულარული ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$[L(\partial y)u(y)]^+ = \left[\left(u_1(y), u_2(y), \frac{\partial u_2}{\partial y_1} - \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right)^T \right]^+ = f(y), \quad y \in S, \quad (8)$$

სადაც $f = (f_1, f_2, f_3)^T$, $C^{0,\alpha}(S)$, $\alpha < \alpha < 1$ კლასის მოცემული ვექტორ-ფუნქციაა.

აღნიშნული ამოცანა წარმოადგენს მომენტური დრეკადობის თეორიის სტატიკის პირველ შიგა სასაზღვრო ამოცანას და მას $(I)_f^+$ აღვნიშნავთ.

$(I)_f^+$ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი და ეს ამონახსნი პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით მოცემულია მ. ბაშელეიშვილის ზემოთ მითითებული შრომაში.

ზემთ აღნიშნული ამოცანის ამოხსნა მოცემულია ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით. დამტკიცებულია შემდეგ თეორემა.

თეორემა. (7) ფუნქციონალის მამინიმიზირებელი $u = (u_1, u_2)^T$ ვექტორ-ფუნქცია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ წარმოადგენს $(I)_f^+$ ამოცანის ამონახსნს თუ ის აკმაყოფილებს (8) სასაზღვრო პირობას.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, (7) ფუნქციონალის მამინიზირებელი $u = (u_1, u_2)^T$ ვექტორ-ფუნქცია აკმაყოფილებს (8) სასაზღვრო პირობას. დავამტკიცოთ, რომ $u(x), (I)_f^+$ ამოცანის ამონახსენია.

ამ მიზნით განვიხილოთ $u(x) + \varepsilon h(x)$ ვექტორ-ფუნქცია, სადაც ε ნებისმიერი ნამდვილი სკალარული მუდმივია, ხოლო $h = (h_1, h_2)^T \neq 0$ D^+ არეში ნებისმიერი რეგულარული ვექტორ-ფუნქციაა, ამასთან აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$[L(\partial y)h(y)]^+ = \left[\left(h_1(y), h_2(y), \frac{\partial h_2}{\partial y_1} - \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \right)^T \right]^+ = 0, \quad y \in S. \quad (9)$$

შევნიშნოთ, რომ ელემენტარული გამოთვლების შედეგად მივიღებთ (იხ, (4), (6), და (7))

$$\prod(u + \varepsilon h, v) \equiv \prod(u, v) + 2\varepsilon \prod(u, h, v) + \varepsilon^2 \prod(h, v) > 0, \quad (10)$$

სადაც

$$\prod(u, h, v) = \int_{D^+} E(u, h, v) dx. \quad (11)$$

ახლა, (3)-ში თუ დაუშვებთ, რომ $V = h$ მაშინ (9) პირობის და (11) ფორმულის საფუძველზე დავწერთ

$$\int_{D^+} h(x) A(\partial x, v) u(x) dx = -\prod(u, h, v). \quad (12)$$

მეორე მხრივ, რადგან $u(x), \prod(u, v)$ ფუნქციონალის მამინიმიზირებელი ვექტორ-ფუნქციაა, ამასთან (10)-ში ε ნებისმიერი სკალარული მუდმივია, ამიტომ (10) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\prod(u, h, v) = 0 \quad (13)$$

ამრიგად, (13) ტოლობის საფუძველზე (12)- დან გამომდინარეობს

$$\int_{D^+} h(x) A(\partial x, v) u(x) dx = 0. \quad (14)$$

კ. სვანაძე

ახლა მხედველობაში, თუ მივიღებთ იმ ფაქტს, რომ D^+ არეში $h(x)$ ნებისმიერი ნულისაგან განსხვავებული რეგულარული ვექტორ-ფუნქციაა, მაშინ (14) ტოლობის საფუძველზე მარტივად დავასკვნით რომ (7) ფუნქციონალის მამინიზირებელი $u(x)$ ვექტორ-ფუნქცია წარმოადგენს (1) განტოლების რეგულარულ ამონახსნს.

მეორე მხრივ, რადგან პირობის თანახმად (7) ფუნქციონალის მამინიზირებელი ვექტორ-ფუნქცია $u(x)$ აკმაყოფილებს (8) სასაზღვრო პირობას, ამიტომ $(I)_f^+$ ამოცანის შესახებ ერთადერთობის თეორემის საფუძველზე, მარტივად დავასკვნით, რომ (7) ფუნქციონალის მამინიზირებელი $u(x)$ ვექტორ-ფუნქცია არის $(I)_f^+$ ამოცანის ამონახსენი. ამრიგად, პირობის საკმარისობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ, თეორემის აუცილებლობის პირობა. ვთქვათ (7) ფუნქციონალის მამინიზირებელი $u(x)$ ვექტორ-ფუნქცია, არის $(I)_f^+$ ამოცანის ამონახსენი. მეორე მხრივ, გამომდინარე აქედან ერთადერთობის თეორემის თანახმად, მხოლოდ მოცემული $f = (f_1, f_2, f_3)^T$ ვექტორ-ფუნქციისათვის ადგილი ექნება (8) სასაზღვრო პირობას. მაშასადამე, პირობის აუცილებლობაც დამტკიცებულია.

ლიტერატურა

Svanadze, K.N. 2019. „On the solution of the first plane interior boundary value problem of statics of the theory of elastic mixture by variation method“. Seminar of I. vekua. Institute of Applied Mathematics Reports, Vol. 45. 2019: 35-38.

Башелеишвили, М.О. 1969. „Решение плоских граничных задач статики моментной теории упругости“. საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე. ტომი 56, №1, 1969.

Бицадзе, А.В. 1976. Уравнения математической физики. Москва: Наука.

Сванадзе, К.Н. 1978. „Эффективное решение задачи коши для уравнений динамики плоской теории упругости с учетом моментных напряжений“. საქართველოს სსრ პედაგოგიური ინსტიტუტის შრომები. IV, 1978: 159-165.

Mathematical Physics

On the solution of the first plane interior boundary value problem of statics of the moment elasticity theory by variation method

Kosta Svanadze

Akaki Tsereteli State university
Kutaisi, Georgia
kostasvanadze@yahoo.com

In the paper the boundary value problem of statics of the moment elasticity theory is solved by variation method in the case, when on the boundary a simple connected finite plane domain is given a displacement vector and rotation.

Keywords: *the first interior boundary value problem of statics of the moment elasticity theory, variation method, functional, minimizing vector-function.*

10. The homogeneous equation of statics of the moment elasticity theory for the two-dimensional case can be written in the matrix form as (Bashelishili)

$$A(\partial x, \nu)u(x) = 0, \tag{1}$$

where

$$A(\partial x, \nu) = [A_{kj}(\partial x, \nu)]_{2 \times 2}$$

$$A_{kj}(\partial x, \nu) = \delta_{kj} \Delta(\mu - \nu \Delta) + (\lambda + \mu + \nu \Delta) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}, \quad k, j = 1, 2$$

δ_{kj} is kroneker's symbol, Δ is the Laplace operator. $u = (u_1, u_2)^T$ is vector displacement λ, μ and ν are elastic constants. In the sequel is assumed that

$$\mu > 0, \quad \nu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0 \tag{2}$$

Let D^+ be a finite two-dimensional region bounded by the contour $S \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$

A vector-function $u = (u_1, u_2)^T$ is said to be regular in D^+ if

$$u \in C^1(\overline{D^+}) \cap C^2(D^+), \quad \omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \in C^0(\overline{D^+}) \cap C^1(D^+).$$

Note that for a regular $u = (u_1, u_2)^T$ and $V = (V_1, V_2)^T$ vector-functions we have the Green formula (Svanadze 1978, 159-165)

3. Եզրնեղ

$$\int_{D^+} [V(x)A(\partial x, \nu)u(x) + E(V, u, \nu)] dx = \int_S [LV(y)]^+ [Tu(y)]^+ dy, \quad (3)$$

where $x = (x_1, x_2) \in D^+$, $y = (y_1, y_2) \in S$,

$$LV(y) = L(\partial y)V(y) = \left[V_1(y), V_2(y), \frac{\partial V_2}{\partial y_1} - \frac{\partial V_1}{\partial y_2} \right]^T,$$

$$Tu(y) = T(\partial y, \nu, n(y))u(y) = \left[\tau_1, \tau_2, \nu \frac{\partial}{\partial n(y)} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_1} - \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right) \right]^T,$$

$$\tau_1 = 2\mu \frac{\partial u_1(y)}{\partial n(y)} + \lambda n_1(y) \operatorname{div} u(y) + (\nu \Delta + \mu) n_2(y) \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_1} - \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right),$$

$$\tau_2 = 2\mu \frac{\partial u_2(y)}{\partial n(y)} + \lambda n_2(y) \operatorname{div} u(y) - (\nu \Delta + \mu) n_1(y) \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_1} - \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right),$$

$$\begin{aligned} E(V, u, \nu) = E(u, V, \nu) &= \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \operatorname{div} u \operatorname{div} V + \frac{1}{2} \mu \sum_{p \neq q}^2 \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right) \left(\frac{\partial V_p}{\partial x_q} + \frac{\partial V_q}{\partial x_p} \right) + \\ &+ \frac{1}{3} \mu \sum_{p, q}^2 \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_p} - \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \right) \left(\frac{\partial V_p}{\partial x_p} - \frac{\partial V_q}{\partial x_q} \right) + \nu \sum_{p=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

From (4) when $V = u$ we obtain

$$\int_{D^+} [u(x)A(\partial x, \nu)u(x) + E(u, u, \nu)] dx = \int_S [Lu(y)]^+ [Tu(y)]^+ dy, \quad (5)$$

where

$$\begin{aligned} E(u, u, \nu) &= \frac{3\lambda + 2\mu}{3} |\operatorname{div} u|^2 + \frac{1}{2} \mu \sum_{p \neq q}^2 \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{3} \mu \sum_{p, q}^2 \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_p} - \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \right)^2 + \nu \sum_{p=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Owing to (2) it follows that $E(u, u, \nu)$ is the positively defined quadratic form also note that the equation $E(u, u, \nu) = 0$ admits a solution

$$u_1(x) = b_1 - ax_2, \quad u_2(x) = b_2 + ax_1,$$

where a , b_1 and b_2 are arbitrary real constants.

Let us consider the functional

$$\Pi(u, \nu) = \int_{D^+} E(u, u, \nu) dx, \quad (7)$$

where $E(u, u, v)$ is defined by (6).

According to these results we can say that (7) functional is a positively defined quadratic form.

2⁰. Solution of the first interior boundary value problem. The first interior boundary value problem of statics is formulated as follows (Basheleishvili): find a regular solution of equation (1) in D^+ satisfies the boundary condition

$$\left[L(\partial y)u(y) \right]^+ = \left[\left(u_1(y), u_2(y), \frac{\partial u_2}{\partial y_1} - \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right)^T \right]^+ = f(y), \quad y \in S, \quad (8)$$

where $f \in C^{0,\alpha}(S)$, $\alpha < \alpha < 1$ is given vector-function.

Let us denote by $(I)_f^+$ the (1) (8) problem. The following assertion is true.

The $(I)_f^+$ problem is uniquely solvable.

Let us now prove the following.

Theorem 1. The vector-function $u = (u_1, u_2)^T$ minimizes the functional (7) is a solution of the problem $(I)_f^+$ only if the condition (8) is fulfilled.

Proof. At first let us proof sufficiency of equality (8). Let, $f(y)$ be such that minimization of the vector-function $u(x)$, of the functional (7) satisfies condition (8). Let us show that the vector-function $u(x)$, is solution of problem $(I)_f^+$.

At this end let us consider the vector-functon $u(x) + \varepsilon h(x)$ where ε is an arbitrary real scalar constant, and $h = (h_1, h_2)^T \neq 0$ is an arbitrary regular vector-function in D^+ and satisfies the condition

$$\left[L(\partial y)h(y) \right]^+ = \left[\left(h_1(y), h_2(y), \frac{\partial h_2}{\partial y_1} - \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \right)^T \right]^+ = 0, \quad y \in S. \quad (9)$$

Elementary calculations yield (see (4), (6) and (7),

$$\prod(u + \varepsilon h, v) \equiv \prod(u, v) + 2\varepsilon \prod(u, h, v) + \varepsilon^2 \prod(h, v) > 0, \quad (10)$$

where

3. სვანობა

$$\prod_{D^+}(u, h, v) = \int_{D^+} E(u, h, v) dx. \quad (11)$$

From (3) if $V = h$ by virtue of (9) and (11) we obtain

$$\int_{D^+} h(x) A(\partial x, v) u(x) dx = -\prod_{D^+}(u, h, v). \quad (12)$$

Let us note that since in (10) ε is an arbitrary real scalar constant and the $\prod(u, v)$ function at $u(x)$ attains minimum therefore we have

$$\prod(u, h, v) = 0. \quad (13)$$

By virtue of the fact $h(x) \neq 0$ is an arbitrary regular vector-function in D^+ therefore owing to (13) from (12) it follows that $u(x)$ is a solution of equation (1) in the domain D^+ .

Finally, from the above arguments and the fact that problem $(I)_f^+$ has a unique solution we conclude that if (8) condition is fulfilled then the minimization vector-function $u(x)$ of the functional (7) is a solution of the problem $(I)_f^+$.

Now let us show necessity of condition (8). Let $f(y)$ be such that minimization vector-function $u(x)$ of the functional (7) is the solution of problem $(I)_f^+$. We shall show that condition (8) is fulfilled. Since the minimization vector-function $u(x)$ of the functional (7) is the solution of the problem $(I)_f^+$, owing to uniqueness theorem, we can conclude that (8) is fulfilled.

Finally from uniqueness theorem and Theorem 1, we conclude that minimization vector-function $u(x)$ of the functional (7) is the uniquely solution of the problem $(I)_f^+$.