

ანალიზი

**ბლიაშკე - ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლის  
სასაზღვრო თვისებების შესახებ**

გიორგი თეთვაძე

ლილი თეთვაძე

ლამარა ციბაძე

lamaratsibadze@gmail.com

აპაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი  
ქუთასი, საქართველო

ნაშრომში დადგენლია საკმარისი პირობები იმისა, რომ ბლიაშკე - დერბაშიანის კანონიკურ ნამრავლს გააჩნდეს კუთხური სასაზღვრო მნიშვნელობები.

**საკვანძო სიტყვები:** ბლიაშკე - დერბაშიანის კანონიკური ნამრავლი, კუთხური სასაზღვრო მნიშვნელობები.

დასაწყისში შემოვიღოთ ზოგიერთი აღნიშვნა და განმარტება:

$\mathbb{C}$  - კომპლექსურ რიცხვთა ველი.

$\mathbb{D} = \{z: |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$  - ერთეულოვანი წრე.

$V_\varphi(e^{i\theta})$  – შტოლცის კუთხე, ე.ი.  $e^{i\theta}$  ე წერტილიდან გავლებული ორი ქორდით შედგენილი  $2\varphi - \varepsilon, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$  ტოლი კუთხე, რომლებსთვისაც  $[0; e^{i\theta}]$  რადიუსი ბისექტრისაა.

$\Delta\varphi(e^{i\theta}, z) = \{z: |z - e^{i\theta}| < 1 - r, 0 < r < 1, z \in \mathbb{C},\} \cap V_\varphi(e^{i\theta}) - e^{i\theta}$   
წერტილის სამკუთხა მიდამო.

$M$  სიმრავლის ჩაკეტვა ავღნიშნოთ -  $\bar{M}$ -ით.

ზღვარს  $\lim_{\substack{z \rightarrow e^{i\theta} \\ z \in V_\varphi(e^{i\theta})}} f(z) = \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z)$  ეწოდება  $f$  ფუნქციის კუთხური

სასაზღვრო მნიშვნელობა  $e^{i\theta}$  წერტილში.

ერთეულოვან წრეში ანალიზური ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობის შესწავლის დროს მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ბლიაშკეს ნამრავლი (Blaschke W, ... 1915)

$$B(z, (a_n)) = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} \left( 1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \bar{a}_n z} \right),$$

სადაც  $\lambda + 1$  ნატურალური რიცხვია,  $0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|) < +\infty.$$

იმ შემთხვევისთვის, როცა  $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|) = +\infty$  არსებობს ბლიაშკეს ნამრავლის სხვადასხვა განზოგადებები (Picard ... 1926, Джербашян ... 1945, 1948, 1961, Тетвадзе ... 1980, Tsuji ... 1955).

ბლიაშკე - ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლს (Джербашян ... 1945) აქვს სახე

$$B_p(z, (a_n)) = z^\lambda \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \bar{a}_n z} \right) \exp \left( \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left( \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \bar{a}_n z} \right)^k \right),$$

სადაც  $\lambda + 1$  და  $p$  ნატურალური რიცხვებია  $0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1, |z| < 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|)^p = +\infty, \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|)^{p+1} < +\infty$$

უსასრულო ნამრავლი  $B_p(z, (a_n))$  თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადია ერთეულოვანი ღია წრის შიგნით, რის გამოც იგი წარმოადგენს ანალიზურ ფუნქციას ნულებით

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_\lambda, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

შევნიშნოთ, რომ ბლიაშკე-ჯერბაშიანის ნამრავლი არის ჯერბაშიანის ნამრავლის (Джербашян ... 1948) კერძო შემთხვევა.

ფროსტმანმა ბლიაშკეს ნამრავლისათვის დაამტკიცა (Frostman ... 1942) შემდეგი მნიშვნელოვანი

**თეორემა 1.** იმისათვის, რომ ბლიაშკეს  $B(z, (a_n))$  ნამრავლს და მის ყველა ქვეთანამრავლს ქონდეს რადიალური ზღვარი მოდულით ერთი  $e^{i\theta}$  წერტილში აუცილებელი და საკმარისია, რომ

გ. თეთვაძე, ლ. თეთვაძე, ლ. ციხაძე

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - |a_n|}{|e^{i\theta} - a_n|} < +\infty,$$

ბლიაკშე-ჯერბაშიანის ნამრალვისთვის მტკიცდება ანალოგიური

**თეორემა 2.** თუ  $0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1, |z| < 1,$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|)^P = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|)^{P+1} < +\infty$$

და

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1 - |a_n|}{|e^{i\theta} - a_n|} \right)^{P+1} < +\infty,$$

მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \mathcal{B}_P(z, (a_n)) = \mathcal{B}_P(e^{i\theta}, (a_n)) \neq 0, \infty.$$

**დამტკიცება:** ცხადია,

$$\frac{1 - |a_n|}{|e^{i\theta} - a_n|} = \frac{1 - |a_n e^{-i\theta}|}{|1 - a_n e^{-i\theta}|}, \quad \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n} e^{i\theta} z} = \frac{1 - |a_n e^{-i\theta}|^2}{1 - \overline{a_n e^{-i\theta}} z},$$

ამიტომ,

$$\mathcal{B}_P(z e^{i\theta}, (a_n)) = e^{i\lambda\theta} \mathcal{B}_P(z, (a_n e^{-i\theta}))$$

აქედან კი ცხადია, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ  $e^{i\theta} = 1$ . მაშასადამე, ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ თუ

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1 - |a_n|}{|1 - a_n|} \right)^{P+1} < +\infty, \quad (1)$$

მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{B}_P(z, (a_n)) = \mathcal{B}_P(1, (a_n)) \neq 0, \infty.$$

ამისათვის უნდა ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი  $V\varphi(1)$ ,  $0 < \varphi < \pi/2$  შტოლცის კუთხისთვის

$$\lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{B}_P(z, (a_n)) = \mathcal{B}_P(1, (a_n)), \quad z \in V\varphi(1).$$

დავაფიქსიროთ  $\varphi$ ,  $0 < \varphi < \pi/2$ . (1)-დან ცხადია

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |a_n|}{|1 - a_n|} = 0; \quad (2)$$

თუ  $z \in \overline{V\varphi(1)} \setminus \{1\}$  და  $z = x + iy$ , მაშინ ცხადია  $|y| \leq (1-x)tg\varphi$ ,  
საიდანაც მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{|1-z|}{1-|z|} &= \frac{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{(1-x)\sqrt{1+tg^2\varphi}}{1 - \sqrt{x^2 + (1-x)^2tg^2\varphi}} \\ &= \frac{(1-x)(1 + \sqrt{x^2 + (1-x)^2tg^2\varphi})}{\cos\varphi((1-x^2) + (1-x)^2tg^2\varphi)} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{x^2 + (1-x)^2tg^2\varphi})}{\cos\varphi(1+x - (1-x)tg^2\varphi)}. \end{aligned} \quad (3)$$

რადგან

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 + \sqrt{x^2 + (1-x)^2tg^2\varphi})}{1+x - (1-x)tg^2\varphi} = 1,$$

ამიტომ ნებისმიერი  $\varepsilon > 0$  რიცხვისთვის იარსებებს ისეთი  $r < x < 1$ ,  
რომ

$$\frac{(1 + \sqrt{x^2 + (1-x)^2tg^2\varphi})}{1+x - (1-x)tg^2\varphi} < 1 + \varepsilon, \quad r < x < 1$$

აქედან მივიღებთ

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} < \frac{1+\varepsilon}{\cos\varphi}, \quad z \in \overline{\Delta\varphi(1;r)} \setminus \{1\}. \quad (4)$$

(4)-ს ძალით თუ  $a_n \in \overline{\Delta\varphi(1;r)}$ , მაშინ

$$\frac{1 - |a_n|}{|1 - a_n|} > \frac{\cos\varphi}{1 + \varepsilon}.$$

რადგან  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$ , ამიტომ (2)-დან და უკანსკნელი უტოლობიდან  
დავასკვნით, რომ არსებობს ისეთი  $r_0, 0 < r_0 < 1$

$$a_n \notin \Delta\varphi(1, r_0), \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

თუ  $z \in \overline{\Delta\varphi(1; r_0)} \setminus \{1\}$ , მაშინ (4)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{1 - |a_n|}{|1 - \overline{a_n}z|} &= \frac{1 - |\overline{a_n}|}{|1 - \overline{a_n}z|} \leq \frac{|1 - \overline{a_n}z| + |\overline{a_n}(1-z)|}{|1 - \overline{a_n}z|} \leq 1 + \frac{|1-z|}{1 - |\overline{a_n}||z|} < \\ &< 1 + \frac{|1-z|}{1-|z|} < 1 + \frac{1+\varepsilon}{\cos\varphi} \end{aligned}$$

გ. თეთვაძე, ლ. თეთვაძე, ლ. ციხაძე

მაშასადამე,

$$|1 - \overline{a_n}z| > \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi + 1 + \varepsilon} |1 - a_n|, z \in \overline{\Delta \varphi(1; r_0)}. \quad (6)$$

აქედან კი მივიღებთ, როცა  $z \in \overline{\Delta \varphi(1; r_0)}$

$$\frac{1 - |a_n|^2}{|1 - \overline{a_n}z|} \leq \frac{2(\cos \varphi + 1 + \varepsilon)}{\cos \varphi} \cdot \frac{1 - |a_n|}{|1 - a_n|}. \quad (7)$$

(2) და (7)-ის ძალით ნებისმიერი  $0 < q < 1$  რიცხვისთვის იარსებებს ისეთი  $n_0$  ნომერი, რომ როცა  $n > n_0$  და  $z \in \overline{\Delta \varphi(1; r_0)}$ , მაშინ

$$\frac{1 - |a_n|^2}{|1 - \overline{a_n}z|} < q < 1. \quad (8)$$

აღვნიშნოთ

$$A_n(z) = \left(1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n}z}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^P \frac{1}{k} \left(\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n}z}\right)^k\right),$$

$$\mathcal{B}_{P_1}(z, (a_n)) = z^\lambda \prod_{n=1}^{n_0} A_n(z) \quad \text{და} \quad \mathcal{B}_{P_2}(z, (a_n)) = \prod_{n=n_0+1}^{+\infty} A_n(z).$$

ამ აღნიშვნებიდან მივიღებთ

$$\mathcal{B}_P(z, (a_n)) = \mathcal{B}_{P_1}(z, (a_n)) \cdot \mathcal{B}_{P_2}(z, (a_n)),$$

ამასთან, ცხადია,  $\mathcal{B}_{P_1}(z, (a_n))$  უწყვეტი ფუნქციაა  $\mathbb{D}$ -ში. ამიტომ, თეორემის დამტკიცებისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{B}_{P_2}(z, (a_n)) = \mathcal{B}_{P_2}(1, (a_n)). \quad (9)$$

ავირჩიოთ ლოგარითმული ფუნქციის მთავარი მნიშვნელობა  $\ln \omega = \ln|\omega| + i \arg \omega$ ,

$-\pi < \arg \omega \leq \pi$  (8)-ს ძალით

$$\ln A_n(z) = \ln\left(1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n}z}\right) + \sum_{k=1}^P \frac{1}{k} \left(\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n}z}\right)^k = -\sum_{k=P+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n}z}\right)^k;$$

აქედან მივიღებთ

$$\mathcal{B}_{P_2}(z, (a_n)) = e^{-\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k=P+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n}z}\right)^k}. \quad (10)$$

(7) და (8)-ს ძალით როცა  $z \in \overline{\Delta\varphi(1, r_0)}$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z} \right) \right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k=p+1}^{\infty} \left( \frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|} \right)^k = \\ & = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{\left( \frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|} \right)^{p+1}}{1 - \frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|}} < \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{\left( \frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi + 1 + \varepsilon} \right)^{p+1} \left( \frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}|} \right)^{p+1}}{1-q} = \\ & = \left( \frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi + 1 + \varepsilon} \right)^{p+1} \cdot \frac{1}{1-q} \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \left( \frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}|} \right)^{p+1}; \end{aligned}$$

აქედან თეორემის პირობის ძალით გამომდინარეობს მწკრივის

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z} \right)$$

თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადობა  $\overline{\Delta\varphi(1, r_0)}$ -ზე და მაშასადამე უსასრულო ნამრავლი  $\mathcal{B}_{p_2}(z, (a_n))$ -ის თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადობა  $\overline{\Delta\varphi(1, r_0)}$ -ზე. რის გამოც იგი იქნება უწყვეტი ფუნქცია  $\Delta\varphi(1, r_0)$ -ზე და შესრულდება პირობა

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_p(1, z_0)}} \mathcal{B}_{p_2}(z, (a_n)) = \mathcal{B}_{p_2}(1, (a_n)) \neq 0, \infty.$$

და რადგან  $\varphi$  ნებისმერი კუთხეა  $0 < \varphi < \pi/2$ , ამიტომ

$$\lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{B}_{p_2}(z, (a_n)) = \mathcal{B}_{p_2}(1, (a_n)) \neq 0, \infty.$$

ეს კი, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ამტკიცებს თეორემას.

### ლიტერატურა

- Tsuji, M. 1956. "Canonical product for a meromorphic function in a unit circle". Journal of the Mathematic Society of Japan, Vol 8, N1.
- Frostman, O. 1942. Sur les produits de Blaschke, Kunngl. Fysiogr. Sallsk, I lund Forh.12, 1942: 169-181.

Picard, E. 1926. Traite d'Analyse VII. Paris.

Джербашян, М. М. 1945. "О каноническом представлении мероморфных в единственном круге функции". Армянский ССР. Сообщение, Институт математики и механики. 3, N1, 1945: 3-9.

Джербашян, М. М. 1948. "К проблеме представитимости аналитических функций. Сообщение". Институт математики и механики, Вып N2, 1948: 3-40.

Джербашян, М. М. 1961. Интегральное преобразование и представление функций в комплексной области. Армянский ССР: Сообщение, Институт математики и механики.

Тетвадзе, Г. 1980. "О граничных свойствах произведений типа Бляшке в единичном круге". Сообщение, Академия наук, ГССР, 99, N3, 1980: 537-539.

## Analysis

### On boundary properties of Bliashke-Djrbashyan Canonical product

**Giorgi Tetvadze**

**Lili Tetvadze**

**Lamara Tsibadze**

lamaratsibadze@gmail.com

Akaki Tsereteli State University

Kutaisi, Georgia

*The paper establishes sufficient conditions for Bliashke-Djrbashyan Canonical product, in order to have angular boundary values.*

**Keyword s:** canonical product of Blaschke - Djrbashyan, angular boundary values.

For the beginning, we have some definitions:

$\mathbb{C}$  - the Field of complex numbers.

$\mathbb{D} = \{z: |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$  - Unit disk.

$V_\varphi(e^{i\theta})$  – Stolz Angle, is an angle equal to  $2\varphi$ ,  $0 < \varphi < \pi/2$  and is formed by two chords that come out of the point  $e^{i\theta}$ , radius  $[0; e^{i\theta}]$  is bisector,  $0 < \varphi < \pi/2$ .

$\Delta\varphi(e^{i\theta}, z) = \{z: |z - e^{i\theta}| < 1 - r, 0 < r < 1, z \in \mathbb{C},\} \cap V_\varphi(e^{i\theta})$  – triangular neighborhood of the  $e^{i\theta}$  point.

By  $\bar{M}$  denote the closure of of the set  $M$ .

The limit  $\lim_{\substack{z \rightarrow e^{i\theta} \\ z \in V_\varphi(e^{i\theta})}} f(z) = \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z)$  is the angular boundary value of the function  $f$  in the  $e^{i\theta}$  point.

Blaschke Product plays an important role in the study of boundary values of the analytic function in the unit disk (Blaschke W, ... 1915).

$$B(z, (a_n)) = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} \left(1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \bar{a}_n z}\right),$$

where  $\lambda + 1$  is natural number,  $0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1,$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|) < +\infty.$$

In case, when  $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|) = +\infty$ , there are different generalizations of Blaschke Product (Picard E. ... 1926, Джербашьян, М. ...1945, 1948, 1961, Тетвадзе, Г. ... 1980, Tsuji, ... 1955).

Canonical product of Blaschke - Djerbashyan

$$\mathcal{B}_p(z, (a_n)) = z^\lambda \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \bar{a}_n z}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left(\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \bar{a}_n z}\right)^k\right)$$

is particular case of Djerbashyan product (Джербашьян,...1948), where  $\lambda + 1$  and  $p$  natural numbers  $|z| < 1,$

$$0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|)^p = +\infty, \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|)^{p+1} < +\infty$$

გ. თეთვაძე, ლ. თეთვაძე, ლ. ციხაძე

Infinite product  $\mathcal{B}_p(z, (a_n))$  is uniformly and absolutely convergent inside of the open unit disk, and represents analytic function with zeros

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_\lambda, a_1, a_2, \dots, a_n \dots$$

For Blaschke product Frostman approved (Frostman ...1942)the following important

**Theorem 1.** A necessary and sufficient condition that  $B(z, (a_n))$  and all its subproducts have radial limits of modulus one at  $e^{i\theta}$  is that

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - |a_n|}{|e^{i\theta} - a_n|} < +\infty,$$

For Blaschke-Djrbashan product similar theorem takes place:

**Theorem 2.** If  $0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1, |z| < 1,$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|)^p = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|)^{p+1} < +\infty$$

and 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1 - |a_n|}{|e^{i\theta} - a_n|} \right)^{p+1} < +\infty,$$

then following equality takes place:

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \mathcal{B}_p(z, (a_n)) = \mathcal{B}_p(e^{i\theta}, (a_n)) \neq 0, \infty.$$

**Proof:** It is clear that

$$\frac{1 - |a_n|}{|e^{i\theta} - a_n|} = \frac{1 - |a_n e^{-i\theta}|}{|1 - a_n e^{-i\theta}|}$$

$$\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n} e^{i\theta} z} = \frac{1 - |a_n e^{-i\theta}|^2}{1 - \overline{a_n} e^{-i\theta} z},$$

Therefore,

$$\mathcal{B}_p(z e^{i\theta}, (a_n)) = e^{i\lambda\theta} \mathcal{B}_p(z, (a_n e^{-i\theta})).$$

Without restricting the generalization, it can be considered that  $e^{i\theta} = 1$ . So, we need to prove that

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1 - |a_n|}{|1 - a_n|} \right)^{p+1} < +\infty, \quad (1)$$

In this case, there is equality

$$\lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{B}_p(z, (a_n)) = \mathcal{B}_p(1, (a_n)) \neq 0, \infty.$$

We need to demonstrate that, for every  $V\varphi(1)$ ,  $0 < \varphi < \pi/2$  Stolz Angle

$$\lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{B}_p(z, (a_n)) = \mathcal{B}_p(1, (a_n)), \quad z \in V\varphi(1).$$

Fix  $\varphi$ ,  $0 < \varphi < \pi/2$ . According to (1), it is vivid that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |a_n|}{|1 - a_n|} = 0; \quad (2)$$

If  $z \in \overline{V\varphi(1)} \setminus \{1\}$  and  $z = x + iy$ , then obviously  $|y| \leq (1 - x)tg\varphi$ , so

$$\begin{aligned} \frac{|1 - z|}{1 - |z|} &= \frac{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{(1 - x)\sqrt{1 + tg^2\varphi}}{1 - \sqrt{x^2 + (1 - x)^2tg^2\varphi}} \\ &= \frac{(1 - x)(1 + \sqrt{x^2 + (1 - x)^2tg^2\varphi})}{\cos\varphi((1 - x^2) + (1 - x)^2tg^2\varphi)} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{x^2 + (1 - x)^2tg^2\varphi})}{\cos\varphi(1 + x - (1 - x)tg^2\varphi)}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 + \sqrt{x^2 + (1 - x)^2tg^2\varphi})}{1 + x - (1 - x)tg^2\varphi} = 1,$$

so, for every  $\varepsilon > 0$  exists  $r < x < 1$ , such that

$$\frac{(1 + \sqrt{x^2 + (1 - x)^2tg^2\varphi})}{1 + x - (1 - x)tg^2\varphi} < 1 + \varepsilon, \quad r < x < 1.$$

From the latest inequality, we have

$$\frac{|1 - z|}{1 - |z|} < \frac{1 + \varepsilon}{\cos\varphi}, \quad z \in \overline{\Delta\varphi(1; r)} \setminus \{1\}. \quad (4)$$

Because of for (4), if  $a_n \in \overline{\Delta\varphi(1; r)}$ , then

$$\frac{1 - |a_n|}{|1 - a_n|} > \frac{\cos\varphi}{1 + \varepsilon}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$ , so according to (2) and the latest inequality, we can conclude, that  $r_0, 0 < r_0 < 1$ , such that

გ. თეთვაძე, ლ. თეთვაძე, ლ. ციხაძე

$$a_n \notin \Delta\varphi(1, r_0), (n = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

If  $z \in \overline{\Delta\varphi(1; r_0)} \setminus \{1\}$ , then according to (4)

$$\begin{aligned} \frac{1 - |a_n|}{|1 - \overline{a_n}z|} &= \frac{1 - |\overline{a_n}|}{|1 - \overline{a_n}z|} \leq \frac{|1 - \overline{a_n}z| + |\overline{a_n}(1 - z)|}{|1 - \overline{a_n}z|} \leq 1 + \frac{|1 - z|}{1 - |\overline{a_n}||z|} < \\ &< 1 + \frac{|1 - z|}{1 - |z|} < 1 + \frac{1 + \varepsilon}{\cos\varphi} \end{aligned}$$

so

$$|1 - \overline{a_n}z| > \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi + 1 + \varepsilon} |1 - a_n|, z \in \overline{\Delta\varphi(1; r_0)}. \quad (6)$$

From (6), when  $z \in \overline{\Delta\varphi(1; r_0)}$

$$\frac{1 - |a_n|^2}{|1 - \overline{a_n}z|} \leq \frac{2(\cos\varphi + 1 + \varepsilon)}{\cos\varphi} \cdot \frac{1 - |a_n|}{|1 - a_n|}. \quad (7)$$

From (2) and (7) for any  $0 < q < 1$  exists  $n_0$  number, such that, when  $n > n_0$  and  $z \in \overline{\Delta\varphi(1; r_0)}$ , we have the following:

$$\frac{1 - |a_n|^2}{|1 - \overline{a_n}z|} < q < 1. \quad (8)$$

Denote

$$\begin{aligned} A_n(z) &= \left(1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n}z}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^P \frac{1}{k} \left(\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n}z}\right)^k\right), \\ \mathcal{B}_{P_1}(z, (a_n)) &= z^\lambda \prod_{n=1}^{n_0} A_n(z) \text{ and } \mathcal{B}_{P_2}(z, (a_n)) = \prod_{n=n_0+1}^{+\infty} A_n(z). \end{aligned}$$

From the denotations above

$$\mathcal{B}_P(z, (a_n)) = \mathcal{B}_{P_1}(z, (a_n)) \cdot \mathcal{B}_{P_2}(z, (a_n)),$$

It is obvious, that  $\mathcal{B}_{P_1}(z, (a_n))$  is continuous function in  $\overline{\mathbb{D}}$ . So, in order to prove the theorem, it is sufficient to prove the following

$$\lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{B}_{P_2}(z, (a_n)) = \mathcal{B}_{P_2}(1, (a_n)). \quad (9)$$

Let's choose main value of the logarithmic function  $\ln \omega = \ln|\omega| + i \arg \omega$ ,

$$-\pi < \arg \omega \leq \pi. \text{ From (8)}$$

$$\ln A_n(z) = \ln \left( 1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n}z} \right) + \sum_{k=1}^P \frac{1}{k} \left( \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n}z} \right)^k = \sum_{k=P+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n}z} \right)^k ;$$

According to the equation above

$$\mathcal{B}_{P2}(z, (a_n)) = e^{-\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k=P+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n}z} \right)^k} . \quad (10)$$

From (7) and (8), when  $z \in \overline{\Delta\varphi(1, r_0)}$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k=P+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n}z} \right)^k \right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k=P+1}^{\infty} \left( \frac{1 - |a_n|^2}{|1 - \overline{a_n}z|} \right)^k = \\ & = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{\left( \frac{1 - |a_n|^2}{|1 - \overline{a_n}z|} \right)^{P+1}}{1 - \frac{1 - |a_n|^2}{|1 - \overline{a_n}z|}} < \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{\left( \frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi + 1 + \varepsilon} \right)^{P+1} \left( \frac{1 - |a_n|^2}{|1 - \overline{a_n}|} \right)^{P+1}}{1 - q} = \\ & = \left( \frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi + 1 + \varepsilon} \right)^{P+1} \cdot \frac{1}{1 - q} \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \left( \frac{1 - |a_n|^2}{|1 - \overline{a_n}|} \right)^{P+1} ; \end{aligned}$$

According to this and the theorem, we have uniform and absolute contingency of the series

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k=P+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n}z} \right)^k$$

on  $\overline{\Delta\varphi(1, r_0)}$  and so, the uniform and absolute contingency of the infinite product  $\mathcal{B}_{P2}(z, (a_n))$  on  $\overline{\Delta\varphi(1, r_0)}$ . So, it is the continuous function on  $\overline{\Delta\varphi(1, r_0)}$  and condition is satisfied

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_p(1, z_0)}} \mathcal{B}_{P2}(z, (a_n)) = \mathcal{B}_{P2}(1, (a_n)) \neq 0, \infty.$$

and because  $\varphi$  is any angle  $0 < \varphi < \pi/2$ , we have

$$\lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{B}_{P2}(z, (a_n)) = \mathcal{B}_{P2}(1, (a_n)) \neq 0, \infty.$$

This, as we already mentioned above, proves the theorem.