ანალიზი

ბლიაშკე - ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლის აბსოლუტურად კრებადობა ერთეულოვანი წრის საზღვარზე

გიორგი თეთვაძე
giorgi.tetvadze@atsu.edu.ge
ლილი თეთვაძე
იური თვალოძე
ლამარა ციბაძე
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო
DOI:https://doi.org./10.52340/atsu.2025.2.26.17

ნაშრომში დადგენილია აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ ბლიაშკე - ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლი აბსოლუტურად კრებადი იყოს ერთეულოვანი წრის საზღვარზე.

საკვანძო სიტყვები: *ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლი და მისი აბსოლუტურად კრებადობა*

დასაწყისში შემოვიღოთ ზოგიერთი აღნიშვნა და განმარტება:

$\mathbb{C}$ - კომპლექსურ რიცხვთა ველი.

$\mathbb{D} = \{z: |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ -ერთეულოვანი წრე.

$V_\varphi(e^{i\theta}) - e^{i\theta}$ წერტილიდან გავლებული ორი ქორდით შედგენილი $2\varphi, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ტოლი კუთხე, რომლისთვისაც $[0; e^{i\theta}]$ რადიუსი ბისექტრისაა.

$\Delta\varphi(e^{i\theta}, z) = \{z: |z - e^{i\theta}| < 1 - \mathrm{r}, 0 < r < 1, z \in \mathbb{C},\} \cap V\varphi(e^{i\theta}) - e^{i\theta}$ წერტილის სამკუთხა მიდამო.

M სიმრავლის ჩაკეტვა აღვნიშნოთ - $\overline{M}$-ით.

ზღვარს $\lim\limits_{\substack{z \to e^{i\theta} \\ z \in V\varphi(e^{i\theta})}} f(z) = \lim\limits_{z \hat{\to} e^{i\theta}} f(z)$ ეწოდება f ფუნქციის კუთხური სასაზღვრო მნიშვნელობა $e^{i\theta}$ წერტილში.

ერთეულოვან წრეში ანალიზური ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობის შესწავლის დროს მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ბლიაშკეს ნამრავლი (Bliashke 1915, 194-200)

$$B(z, (a_n)) = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} \left(1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n} z}\right),$$

სადაც $\lambda + 1$ ნატურალური რიცხვია, $0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| < 1, \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1,$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)<+\infty.$$

იმ შემთხვევისთვის, როცა $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)=+\infty$ არსებობს ბლიაშკეს ნამრავლის სხვადასხვა განზოგადებები (Джербашян …1945, 1948, 1961, Тетвадзе ... 1980).

ბლიაშკე - ჯერბაშიანის კანონიკურ ნამრავლს (Джербашян 1945) აქვს სახე

$$\mathcal{B}_P\big(z,(a_n)\big)=z^{\lambda}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)^k\right),$$

სადაც $\lambda+1$ და p ნატურალური რიცხვებია $0<|a_n|\le|a_{n+1}|<1,\lim_{n\to\infty}|a_n|=1,|z|<1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^P=+\infty,\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^{P+1}<+\infty$$

უსასრულო ნამრავლი $\mathcal{B}_P\big(z,(a_n)\big)$ თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადია ერთეულოვანი ღია წრის შიგნით, რის გამოც იგი წარმოადგენს ანალიზურ ფუნქციას ნულებით

$\underbrace{0,0,\dots0}_{\lambda},a_1,a_2,\dots a_n$,... შევნიშნოთ, რომ ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლი არის ჯერბაშიანის ნამრავლის (Джербашян 1948) კერძო შემთხვევა.

ფროსტმანმა ბლიაშკეს ნამრავლისათვის დაამტკიცა (Frostamn 1942) შემდეგი მნიშვნელოვანი

თეორემა 1. იმისათვის, რომ ბლიაშკეს $B\big(z,(a_n)\big)$ ნამრავლს და მის ყველა ქვეთანამამრავლს ჰქონდეს რადიალური ზღვარი მოდულით ერთი $e^{i\theta}$ წერტილში, აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-|a_n|}{|e^{i\theta}-a_n|}<+\infty.$$

სტატიაში (Tetvadze … 2021) დამტკიცებულია

თეორემა 2. თუ, $0<|a_n|\le|a_{n+1}|<1,\lim_{n\to\infty}|a_n|1,$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^p=+\infty,\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^{p+1}<+\infty$$

და

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|e^{i\theta}-a_n|}\right)^{p+1}<+\infty,$$

მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta}\\ \wedge}}\mathcal{B}_{P+1}\big(z,(a_n)\big)=\mathcal{B}_{P+1}\left(e^{i\theta},(a_n)\right)\ne0,\infty.$$

ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ ანალოგიურ საკითხებს ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლისათვის.

როგორც ცნობილია, უსასრულო ნამრავლს $\prod_{n=1}^{+\infty}(1 \pm U_n)$ ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი, თუ აბსოლუტურად კრებადია მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + u_n)$$

ამ უკანასკნელი მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობა კი ტოლფასია მწკრივის

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$$

კრებადობის.

განსაზღვრა: ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკურ ნამრავლს ვუწოდოთ აბსოლუტურად კრებადი $e^{i\theta}$ წერტილში, თუ არსებობს ისეთი $\mathcal{N}$-ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც კრებადია მწკრივი

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-\bar{a}_n e^{i\theta}|}\right)^k < +\infty.$$

თეორემა 3. იმისათვის, რომ ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლი აბსოლუტურად კრებადი იყოს $e^{i\theta}$ წერტილში, აუცილებელი და საკმარისია კრებადი იყოს მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|1-\bar{a}_n e^{i\theta}|}\right)^{p+1} < +\infty$$

დამტკიცება: პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{1-|a_n|^2}{|1-\bar{a}_n e^{i\theta}|} = \frac{1-|a_n e^{-i\theta}|}{|1-\overline{a_n e^{-i\theta}}|},$$

ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდველად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\theta = 0$.

აუცილებლობა: ვთქვათ კრებადია მწკრივი

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|}\right)^k < +\infty.$$

ამ მწკრივის კრებადობიდან ცხადია, კრებადია მწკრივი

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{p+1}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|}\right)^{p+1} < +\infty$$

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|}\right)^{p+1}$$

$$= \frac{p+1}{(1+|a_N|)^{p+1}}$$

$$\cdot \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{p+1} \cdot \left(\frac{(1+|a_N|)^{p+1}(1-|a_N|)^{p+1}}{|1+a_N|^{p+1}} \right) \leq$$

$$\leq \frac{p+1}{(1+|a_N|)^{p+1}} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(1+|a_N|)^{p+1}(1-|a_N|)^{p+1}}{(p+1)|1-\bar{a}_n|^{p+1}}$$

$$= \frac{p+1}{(1+|a_N|)^{p+1}} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{p+1} \left(\frac{(1-|a_n|)^2}{|1-a_n|^{p+1}} \right)^{p+1} < +\infty$$

აქედან ცხადია, კრებადია მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-|a_n|}{|1-a_n|} \right)^{p+1} < +\infty.$$

საკმარისობა: ვთქვათ კრებადია მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-|a_n|}{|1-a_n|} \right)^{p+1} < +\infty.$$

რადგან $\lim_{n\to\infty}(1+|a_n|) = 2$, ამიტომ იარსებებს ისეთი $\mathcal{N}$ ნატურალური რიცხვი,

რომ $\forall n \geq N$

$$\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|} < q < 1.$$

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|} \right)^k \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} \left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|} \right)^k =$$

$$= \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|} \right)^{p+1}}{1-\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|}} < \frac{2^{p+1}}{1-q} \sum_{n=N}^{+\infty} \left(\frac{1-a_n}{|1-a_n|} \right)^{p+1} < +\infty$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თუ ვისარგებლებთ მე-3 თეორემით, მივიღებთ:

თეორემა 4. თუ ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლი $\mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n))$ აბსოლუტურად კრებადია $z = e^{i\theta}$, წერტილში, მაშინ ამ წერტილში არსებობს კუთხური ზღვარი და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta} \\ \wedge}} \mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n)) = \mathcal{B}_{P+1}\left(e^{i\theta},(a_n)\right) \neq 0, \infty.$$

ლიტერატურა

Bliashke, W. 1915. *Eine Erweitezung des latses von Vitali uber Folgen anlytischez Functuionen. Leipziger Berichte*.

Frostman, O. 1942. „Sur les produits de Blaschke, Kgunl“. *Fysiongr.Sallsk.Lund Forh.* 12, 1942: 169-182.

Tetvadze, G., Tetvadze, L., & Tsibadze, L. 2021. „On boundary properties of the boundary values of Blshke-Djerbashian Canonical product“. *Moambe*, 2021: 195-201.

Джербашян, М.М. 1945. „О каноническом представлении мероморфных в единственном круге функции“. *Доклады Академии Наук Армянский ССР 3, N1*, 1945:3-9.

Джербашян, М.М. 1948. „К проблеме представитимости аналитических функций“. *Сообщение, Институт математики и механики, Вип N2*, 1948: 3-40.

Тетвадзе, Г. 1980. „О граничных своиствах произведений типа Бляшке в единичном круге“. *Сообщение, Академия наук, ГССР, 99, N3*, 1980: 537-539.

Analysis

Convergence on border of the unit disk of Bliashke-Djerbashyan Canonical product

Giorgi Tetvadze
giorgi.tetvadze@atsu.edu.ge
Lili Tetvadze
Iuri Tvalodze
Lamara Tsibadze
Akaki Tsereteli State University
Kutaisi, Georgia
DOI:https://doi.org./10.52340/atsu.2025.2.26.17

The paper establishes sufficient conditions for Bliashke-Djerbashyan Canonical product, in order to have limited chordal variation.

Keywords: *Canonical product of Blaschke-Djerbashyan, chordal variation*

For the beginning, we have some definitions:

$\mathbb{C}$ - the Field of complex numbers.

$\mathbb{D} = \{z: |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ - Unit disk.

$V_\varphi(e^{i\theta})$ – Stolz Angle, is an angle equal to $2\varphi, 0 < \varphi < \pi/2$ and is formed by two chords that come out of the point $e^{i\theta}$, radius $[0; e^{i\theta}]$ is bisector, $0 < \varphi < \pi/2$.

$\Delta\varphi(e^{i\theta}, z) = \{z: |z - e^{i\theta}| < 1 - \mathrm{r}, 0 < r < 1, z \in \mathbb{C},\} \cap V\varphi(e^{i\theta})$ – Triangular neighborhood of the $e^{i\theta}$point. By $\overline{M}$ denote the closure of the set M.

The limit $\lim\limits_{\substack{z \to e^{i\theta} \\ z \in V\varphi(e^{i\theta})}} f(z) = \lim\limits_{z \hat{\to} e^{i\theta}} f(z)$ is the angular boundary value of the function f in the $e^{i\theta}$ point.

Blaschke Product plays an important role in the study of boundary values of the analytic function in the unit disk (Bliashke 1915, 194-200)

$$B(z, (a_n)) = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} \left(1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n} z}\right),$$

where $\lambda + 1$ is natural number, $0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| < 1, \lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = 1,$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|) < +\infty$$

in case, when $\sum_{n=1}^{+\infty}(1 - |a_n|) = +\infty$, there are different generalizations of Blaschke Product (Джербашян…1945, 1948, 1961, Тетвадзе... 1980).

Canonical product of Blaschke – Djerbashyan (Джербашян 1945)

$$\mathcal{B}_P(z, (a_n)) = z^\lambda \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n} z}\right) exp\left(\sum_{k=1}^{P} \frac{1}{k} \left(\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n} z}\right)^k\right)$$

where $\lambda + 1$ and p natural numbers

$$|z| < 1, 0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| < 1, \lim_{n \to \infty} |a_n| = 1,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|)^P = +\infty, \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|)^{P+1} < +\infty$$

Infinite product $\mathcal{B}_P(z, (a_n))$ is unifomly and absolutely convergent inside of the open unit disk, and represents analytic function with zeros

$$\underbrace{0, 0, \dots 0}_{\lambda}, a_1, a_2, \dots a_n \dots$$

It should be noted that canonical product of Blaschke – Djerbashyan is particular case of product of Blaschke – Djerbashyan is particular case of Djerbashyan product (Джербашян 1945).

For the Blaschke product Frostman proved (Frostman 1942) the following important

Theorem 1. In order for the Blaschke product $B(z, (a_n))$ and all its sub multipliers to have a radial limit with module of one at $e^{i\theta}$ point, it is necessary and sufficient that

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-|a_n|}{|e^{i\theta}-a_n|} < +\infty.$$

Proved in the article (Tetvadze … 2021).

Theorem 2. If $0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| < 1, \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| 1,$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1-|a_n|)^p = +\infty, \sum_{n=1}^{+\infty} (1-|a_n|)^{p+1} < +\infty$$

and

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-|a_n|}{|e^{i\theta}-a_n|}\right)^{p+1} < +\infty,$$

Then the following equality holds

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta} \\ \wedge}} \mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n)) = \mathcal{B}_{P+1}\left(e^{i\theta},(a_n)\right) \neq 0, \infty.$$

Similar issues are discussed for Blaschke – Djerbashyan Canonical product below.

As is known, an infinite product $\prod_{n=1}^{+\infty}(1 \pm u_n)$ is called absolutely convergent if the sequence

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+u_n)$$

is absolutely convergent and the absolute convergent of the sequence above is equal to the convergent of the sequence

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|.$$

Definition: A Blaschke - Djerbashyan canonical product is called absolutely convergent at point $e^{i\theta}$ if there exists natural number $\mathcal{N}$ for which the sequence

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-\bar{a}_n e^{i\theta}|}\right)^k < +\infty.$$

Theorem 3. In order for Blaschke -Djerbashyan canonical product to be absolutely convergent at point $e^{i\theta}$, it is necessary and sufficient that for the sequence

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-|a_n|}{|1-\bar{a}_n e^{i\theta}|}\right)^{p+1} < +\infty$$

to be convergent.

Proof. First of all, it should be noted that

$$\frac{1-|a_n|^2}{|1-\bar{a}_n e^{i\theta}|}=\frac{1-\left|a_n e^{-i\theta}\right|}{\left|1-\overline{a_n e^{-i\theta}}\right|},$$

Therefore, without limitation of generality, it can be assumed that $\theta = 0$.

Necessity. Assume that following sequence is convergent

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|}\right)^k < +\infty.$$

From the convergence of this sequence, it is clear that the following sequence is also convergent

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{p+1}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|}\right)^{p+1} < +\infty$$

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|}\right)^{p+1} =$$

$$\frac{p+1}{(1+|a_N|)^{p+1}}$$

$$\cdot\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{p+1}\cdot\left(\frac{(1+|a_N|)^{p+1}(1-|a_N|)^{p+1}}{|1+a_N|^{p+1}}\right)\le$$

$$\le\frac{p+1}{(1+|a_N|)^{p+1}}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(1+|a_N|)^{p+1}(1-|a_N|)^{p+1}}{(p+1)|1-\bar{a}_n|^{p+1}}$$

$$=\frac{p+1}{(1+|a_N|)^{p+1}}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{p+1}\left(\frac{(1-|a_n|)^2}{|1-a_n|^{p+1}}\right)^{p+1} < +\infty\,.$$

Therefore, it is clear that following sequence is convergent

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|1-a_n|}\right)^{p+1} < +\infty.$$

Sufficiency. Suppose, the following sequence is convergent

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|1-a_n|}\right)^{p+1} < +\infty.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+|a_n|)=2$, therefore exist natural number $\mathcal{N}$ such that $\forall n \ge N$

$$\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|} < q < 1.$$

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|}\right)^k \le \sum_{n=N}^{+\infty}\sum_{k=p+1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|}\right)^k =$$

$$=\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|}\right)^{p+1}}{1-\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|}} < \frac{2^{p+1}}{1-q}\sum_{n=N}^{+\infty}\left(\frac{1-a_n}{|1-a_n|}\right)^{p+1} < +\infty$$

Theorem is proved.

According to the theorem 3, there is

Theorem 4. If Blaschke – Djerbashyan canonical product $\mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n))$ is absolutely convergent at point $z = e^{i\theta}$, then there is an angular limit at this point and following equality holds

$$\lim_{\substack{\wedge \\ z\to e^{i\theta}}} \mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n)) = \mathcal{B}_{P+1}\left(e^{i\theta},(a_n)\right) \neq 0, \infty.$$