

მათემატიკური ფიზიკა

დრეკად თხელკედლოვან სტრუქტურათა სამგანზომილებიანი მოდელების რედუქციის შესახებ

თამაზ ვაშაკმაძე

tamazvashakmadze@gmail.com

ი. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ი. ვეკუას სახ. გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი

თბილისი, საქართველო

<https://doi.org/10.52340/atsu.2024.23.01.21>

რედუქციის პროცესებით იგება „დაზუსტებული თეორიათა“ უწყვეტ პრამეტრებზე დამოკიდებული და იერარქიული მოდელები სიმრავლე, რომელიც გარკვეული აზრით ვეკუას და თვალჭრელიძის მეთოდების მოდიფიკაციას წარმოადგენს. შეწვლილია გიოდელის აზრით აგებულ მოდელებს სისრულის საკითხი და ნაჩვენებია, რომ დაზუსტებულ თეორიათა კლასი წარმოადგენს არასრულ სისტემას, ხოლო იერარქიული სახის მოდელები (აპროქსიმაციისა და კრებადობის აზრით) ჰილბერტ-გიოდელის მიხედვით გასრულებული სისტემაა.

საკვანძო სიტყვები: დრეკადი თხელკედლოვანი სტრუქტურა, რედუქციის პროცესი, დაზუსტებული თეორიები, გაუმჯობესებადი შეფასება, კლადნის ექსპერიმენტი, სისტემის სისრულე გიოდელის აზრით.

სტატიაში განხილულ იქნება დრეკად თხელკედლოვან სტრუქტურათა შესაბამისი ამოცანის რედუქციის პროცესი (RP), როდესაც სივცული ცვლადის მიმართ სამგანზომილებიანი მოდელი იცვლება ორგანზომილებიან დიფერენციალურ ამოცანათა სასრული ან თვლადი სისტემით. მოდელებად სიმარტივისათვის აღებულია სასრული სიმადლის მქონე ცილინდრულ სხეული, რომლის პირით ზედაპირებზე მოცემულია ძაბვის ტენზორის სამი კომპონენტი, გვერდით ზედაპირზე-შერეული-ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორებისა და გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებისაგან შედგენილი სამი ერთმანეთისაგან წრფივად დამოუკიდებელი სასაზღვრო პირობა, ცილინდრის ყოველი შიგა წერტილისათვის კმაყოფილდება წონასწორობის კლასიკური განტოლებები. ასევე ვთვლით, რომ შესაბამის სასაზღვრო ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსენი. მიუხედავად RP-თა სიმრავლისა და მრავალსახეობისა, გამოვყოფთ ი. ვეკუასა და ა. თვალჭრელიძის მიერ განვითარებულ RP-ს, რამდენადაც ამ ავტორთა მიდგომა წარმოადგენს გარღვევას იდეური სიახლის თვალსაზრისით და წინაპირობაა

თ. ვაშაყმაძე

დაფუძნებული მოდელების შექმნის მიმართულებით.

როგორც ცნობილია, ი. ვეკუას ნაშრომებში (1942-1977) განხილული იყო დრეკადი გარსებისათვის ორგანოზომილებიანი როგორც სასრული (“დაზუსტებულ თეორიათა”), ისე თვლადი (იერარქიული) ოდენობის მოდელთა აგების ხერხი ფიზიკურ და გეომეტრიულ დაშვებათა და გალიორკინის მეთოდის (როდესაც გადაადგილების ვექტორი წარმოდგენილია ლეჟანდრის ერთი ცვლადის პოლინომთა მწკრივით) საშუალებით; შესწავლილ და გამოკვლეულ იქნა მიღებული სასაზღვრო ამოცანებისთვის ამოხსნადობისა და ამონახსნის პოვნის საკითხები. სათანადო პუბლიკაციები წარმოდგენილია 35-მდე (მათ შორის, 10-მდე მონოგრაფიასა და სახელმძღვანელოებში) საჟურნალო სტატიაში, მრავალი ყრილობისა და კონფერენციის მასალებში, დაცულია 200-ზე მეტი სადოქტორო და საკანდიდატო დისერტაცია. 1982 წელს „ნაუკამ“ გამოსცა ი. ვეკუას რუსულენოვანი მონოგრაფია, რომლის ინგლისური (Vekua 1985) და ქართულენოვანი (1987) თარგმანები შეასრულეს ც. გაბესკირიამ და თ. მეუნარგიამ. (Vekua 1985) წარმოადგენს ერთგვარ ენციკლოპედიური ხასიათის ნაშრომს, სადაც გადმოცემულია ავტორის ადრეულ პუბლიკაციათა კრიტიკული ანალიზი იერარქიულ ნაშრომებთან მიმართებით. კერძოდ, ვკითხულობთ: „სისტემა (7. 18h, i) არის კერძო წარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა ძლიერი ელიფსური სისტემა $N \geq 3$ -ისთვის, მაგრამ ჩვენ მას არ გადავწერთ უფრო დეტალურად და არ შევეხებით არსებობისა და ერთადერთობის პრობლემების გამოკვლევას ზოგადი ფორმით“ (Vekua 1985: 59, 60 (რუს. გამ.) და შემდგომ, „სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნები არ არის შეთანხმებული S^{\pm} პირით ზედაპირებზე მოცემულ სასაზღვრო პირობებთან. ამიტომ ეს მიახლოებები შეიძლება აღმოჩნდეს ძალიან უხეში პირით ზედაპირებთან ახლოს“ (Vekua 1985: 86). ასევე განხილულია ორგანოზომილებიან დიფერენციალურ სისტემათა ახალი კლასი (Vekua 1985: თავი III-V), რომელიც, ერთი მხრივ, მნიშვნელოვნად აფართოებს „ე. წ. დაზუსტებულ თეორიათა“ სიმრავლეს, ხოლო, მეორე მხრივ, წარმოადგენს გარსთა წონასწორობის განსაზღვრის სპეციალური, პრაქტიკისათვის ისეთი უმნიშვნელოვანესი კლასის ამოცანებს, როგორებიცაა: ა) გარსთა თეორიის სტატიკურად განსაზღვრებადი ამოცანა, ბ) ღრუების მქონე გარსისათვის, მათ საზღვრებზე მოცემული ბმების კინემატიკურ პირობებთან თავსებადი დეფორმაციის განსაზღვრის ამოცანა, გ) გარსთა თეორიაში ე.წ. ნეიტრალური ზედაპირების არსებობისა და მისი გეომეტრიულად განსაზღვრის ამოცანები, სადაც დეტალურადაა აღწერილი, რომ აღნიშნული კლასის ამოცანათა კვლევა და არსებითად განმსაზღვრელი პარამეტრების შესაბამისი წარმოდგენების „შესწავლა მიიყვანება ანალიზურ და განზოგადებულ ანალიზურ ფუნქციათა

თეორიების ნაყოფიერ გამოყენებებზე (Vekua 1985: 5)“, რაც, ი. ვეკუას შემოქმედების ერთიანობის დემონსტრაციასთან ერთად, გვესახება პერსპექტიულ მიმართულებად მექანიკის თეორიის მიღწევათა უშუალო გამოყენების ხაზით საინჟინრო ხასიათის მქონე პრაქტიკული ამოცანების გათვლისა და პროექტირებისას.

მნიშვნელოვან მიღწევად უნდა ჩაითვალოს ა. თვალჭრელიძის შრომები, რაც მის მიერ გაერთიანებული სახით წარმოდგენილი იყო სადისერტაციო ნაშრომში: “რამდენიმე საბაზო ზედაპირის მქონე გარსთა თეორია და მისი ზოგიერთი გამოყენებები“ (Tvalchrelidze 1994). (ჩვენი ვალია, ამ შრომის თარგმნა და გამოცემა). ძირითადი მიდგომა, რაც განასხვავებს ამ თეორიას კლასიკური დაზუსტებული თეორიებისაგან, მდგომარეობს იმაში, რომ გარსი დაყოფილია რამდენიმე საბაზო ფენად და ყოველი ფენისათვის განიხილება ფიზიკური და გეომეტრიული დაშვებები ფენის პირეულეების შესაბამისი კოორდინატებით განსაზღვრული სიდიდეების მიმართ. ამის შედეგად, გადაადგილების ვექტორის ტერმინებში შეიქმნა დაზუსტებულ თეორიათა ახალი კლასი. რიცხვითი მეთოდებისა და პროგრამათა კომპლექსების საშუალებით გადაიჭრა და დაინერგა რიგი პრაქტიკული ხასიათის ამოცანებისა, მათ შორის, თვალის გარსის რადალური კერატომიის ოპერაციის მოდელირების პრობლემა.

სტატიაში ასევე განიხილულ იქნება ი. ვეკუასა და ა. თვალჭრელიძის მიდგომათა გაფართოება როგორც იერარქიული, ისე დაზუსტებული თეორიების მიმართულებით (Vashakmadze 1999).

1.1. განვითარებულია დაზუსტებული თეორიებისა და მათი ანალოგების აგების მეთოდი. ამისათვის აგებულია ზუსტი ანალიზური არალოკალური წარმოდგენები ნაშთითი წევრებით. ასეთი წარმოდგენა საშუალებას იძლევა გადასვლის ცდომილებისათვის მივიღოთ გაუმჯობესებადი შეფასებები, რაც თავისთავად უარყოფითი ხასიათის დებულებაა. ამგვარი შეფასების პრინციპული მხარე ანალოგიურია ერნსტ ჰლადნის (Ernst Florens Friedrich Chladni) ექპერიმენტისა დრეკადი რხევადი ფირფიტებისათვის. ამ დარგის მრავალი გამოჩენილი ავტორი (მათ შორის, ეილერი, ბერნული, ჟერმენი, ლაგრანჟი, ნავიე, კირჰოფი, ლავი, ფაილონი, პუანკარე, ფონ კარმანი, ტიმოშენკო, რეისნერი, ჰენკი, მინდლინი, გოლდენვეიზერი, დონელი, ლანდაუ, ვოროვიჩი, ვეკუა, კოიტერი, ნაგდი, ამბარცუმიანი, ვაშიცუ, ლუკასევიჩი, ანტმანი, ბოლი, სიარლე, დესტუნდერი, პოდიო-გუიდეული...) თვლიდნენ, რომ მათი მოდელები იძლევა თხელკედლოვანი სტრუქტურების შემთხვევაში დრეკადობის თეორიის 3-განზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანების აპროქსიმაციას (მექანიკური, გეომეტრიული, ასიმპტოტური ან რაიმე სხვა აზრით), მაგრამ ჩვენ მიერ დამტკიცებულ იქნა,

თ. ვაშაკმაძე

რომ ყოველი დაზუსტებული თეორიისათვის გადასვლის ცდომილება დასაშვებ ამონახსნთა კლასზე შემოსაზღვრულია ქვემოდან. აქ შეგვიძლია მოვიყვანოთ **ედგარ პოს** სიტყვები: "და მაინც, საუკუნეების განმავლობაში, არც ერთ ადამიანს, ლექსში არავის შეუქმნია, ჩანს, არც უფიქრია შეექმნა რაიმე ორიგინალური. ფაქტია, რომ ორიგინალობა (დიადი გონების მქონეთა გარდა) არავითარ შემთხვევაში არ არის, როგორც ზოგიერთებს ჰგონიათ, იმპულსისა თუ ინტუიციისაგან მომდინარედ **...ამაღლებულის მისაღწევად უარყოფა უფროა საჭირო, ვიდრე გამომგონებლობა**" (კომპოზიციის ფილოსოფია, 1846).

1.2. (Vashakmadze 1999)-ის მეორე თავში შესწავლილია რეგულარული პროცესები. დამტკიცებულია ზღვრულად სიმკვრივის, აპროქსიმაციის, ცდომილების შეფასებისა და პროცესების კრებადობის დებულებები. განხილულია ვეკუას ტიპის პროცესი, როდესაც ფირფიტის პირეულებზე მოცემულია ძაბვის ტენზორისა და გადაადგილების ვექტორის წრფივი ფორმა. ვეკუა-კანტოროვიჩის ტიპის მეთოდების დაფუძნების მიმართულებით შესწავლილია იაკობის პოლინომების ბაზისურობასთან დაკავშირებული საკითხები, ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივის ნაშთითი წევრისათვის მიღებულია ფუნქციათა კლასებზე სისქისა და აპროქსიმაციის რიგის მიმართ ერთდროული შეფასება: ვეკუას ტიპის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანებისათვის: 1) $\forall N \leq \infty$ სამართლიანია კორნის ტიპის აპრიორული შეფასებები, 2) სობოლევის სივრცეში გადასვლის ცდომილებისათვის მიღებულია ზუსტი შეფასება სისქისა და აპროქსიმაციის რიგის მიმართ და დამტკიცებულია შესაბამისი პროცესების კრებადობა, 3) აგებულია გაუსისა და რუტისჰაუზერის ტიპის ფაქტორიზებული სქემები, რომელთა საშუალებით განისაზღვრება მიახლოებითი ამონახსნები ნებისმიერი სასრული N-სათვის.

1.3. განვითარებულია 3 განზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებით ამოხსნის ახალი რეგულარული (სპლაინ-აპროქსიმაციაზე დაფუძნებული) მეთოდი. შესაბამისი დიფერენციალური ამოცანათა სისტემის ამოხსნის პროცესი რედუცირდება შედარებით მარტივი სტრუქტურის ოპერატორის შებრუნებით m-ჯერ პრალელურ რეჟიმში, სადაც m არის ფსევდო-ფენათა რაოდენობა და განსაზღვრავს აპროქსიმაციის სიზუსტეს. გადასვლის ცდომილების შეფასება და შესაბამისი პროცესის კრებადობა მტიცდება ფუნქციონალური ანალიზის მეთოდების გამოყენებით აპრიორულ უტოლობებზე დაყრდნობით და ლაქს-მილგრამ-ბაბუშკას ტექნოლოგიით. ადვილი შესამჩნევია, რომ მოყვანილი იერარქიული მოდელი (Tvalchrelidze 1994)-ის განზოგადებაცაა. ამასთან ერთად, საყურადღებოა ის გარემოება, რომ (Vashakmadze 1999)

განხილული იერარქიული მოდელი გამოსავალ სამგანზომილებიან ამოცანაში თხელკედლოვანი სტრუქტურის პირით ზედაპირებზე მოცემული პირობები კმაყოფილდება, როგორც მთავარი (დირიხლეს ტიპის) და არა, როგორც ბუნებრივი (ნეიმანის ტიპის) პირობები $\forall N \leq \infty$.

ზემოთ მოყვანილი სქემა ანალოგიურია კურტ გიოდელის თეორემებისა სისტემის სისრულის შესახებ. როგორც კარგადაა ცნობილი, გასული საუკუნის 30-იან წლებში, გიოდელმა აჩვენა (დავიდ ჰილბერტის მიმდევრებისაგან განსხვავებით) ფორმალური არითმეტიკის არასისრულე. მართლაც, დაზუსტებული თეორიების ანალიზიდან გამომდინარეობს, რომ ფონ კარმან-მინდლინ-რეისნერის ტიპის მოდელები სამგანზომილებიან ამოცანასთან აპროქსიმაციის აზრით არასრული სისტემაა; ამასთან ერთად აღსანიშნავია, რომ თუ ერნსტ ჰლადნის ექსპერიმენტმა აჩვენა მხოლოდ ერთი - ეილერ-ბერნულის მოდელის გამოყენების მიზანშეუწონლობა, ჩვენ მიერ ნაჩვენებია დაზუსტებულ თეორიათა კლასის ნებისმიერი მოდელისათვის გადასვლის ცდომილების შემოსაზღვრულობა ქვემოდან. ასევე, იერარქიული ტიპის მოდელების გამოკვლევის შედეგად გამომდინარეობს, რომ ჰილბერტ-გიოდელის მიხედვით გასრულებულ სისტემას აპროქსიმაციისა და კრებადობის აზრით წარმოადგენენ რედუცირებული მოდელები. მოყვანილი მსჯელობა მათმატიკისათვის დამახასიათებელი ერთიანობის დემონსტრაციაა და მის რომელიმე დარგში იდეური გარღვევა უცილობლად განაპირობებს სხვა დარგშიც ანალოგიური ფაქტის არსებობას.

ლიტერატურა

- Vashakmadze, S. 1999. *The Theory of Anisotropic Elastic Plates*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-3479-0>, Publisher Springer, Hardcover ISBN 978-0-7923-5695-0, Softcover ISBN 978-90-481-5215.
- Vekua, I. 1985. *Shell Theory: General Methods of Construction*. Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne. Некоторые Общие Методы Построения Различных Вариантов Теории Оболочек. Москва: Наука, 1982.
- Tvalchrelidze, A. 1994. *Theory of Shells Using Several Basic Surfaces; It's Some Application*. Dissertation on the doctoral degree in Physical-Mathematical Sciences, I. Vekua IAM of I. Javakhishvili Tbilisi State University.

Mathematical Physics

Reduction of three-dimensional models of elastic thin-walled structures

Tamaz Vashakmadze

tamazvashakmadze@gmail.com
Ivane Javakishvili Tbilisi State University
Ilia Vekua IAM
Tbilisi, Georgia
<https://doi.org/10.52340/atsu.2024.23.01.21>

Through the reduction processes, the multitude of „specified theories“ dependent on the continuous parameters and hierarchical models is constructed, which in a certain sense is a modification of the methods of Vekua and Tvalchrelidze. The question of the completeness of the models built according to Gödel is studied, and it is shown that the class of specified theories is an incomplete system, while the hierarchical models (according to approximation and convergence) represent a complete system according to Hilbert-Gödel.

Keywords: *elastic thin-walled structure, process of reduction, refined theories, unimprovable estimates, experiments of Chladni, Gödel's incompleteness theorem.*

In this article, we consider the reduction process (RP) of thin-walled structures corresponding to the three-dimensional model of the linear theory of elasticity. For simplicity, a cylindrical body with a finite height is taken as a model, when three components of the stress tensor on its face surfaces and three linearly independent boundaries between the stress, strain tensors, and the displacement vector on the side surface are given, and for each inner point of the cylinder, the classical equations of equilibrium are satisfied. We also consider that the corresponding boundary value problem has a unique solution. Despite the abundance and variety of RPs, we highlight the RPs developed by I. Vekua and A. Tvalchrelidze, as the approach of these authors represents a breakthrough in terms of ideological novelty and is a prerequisite for the justification and creation of based models.

As is known, in the works by I. Vekua (1942-1977), the method of building two-dimensional models of both finite (“specified theories”) and countable (hierarchical) quantity models for elastic shells was studied using the physical and geometric assumptions and Galiorkin’s method (when the displacement vector is represented by a row of one-variable Legendre polynomials). The issues of solvability and finding a solution for boundary value problems have been studied

and investigated. Relevant publications are presented in up to 35 (including up to 10 monographs and textbooks) articles and materials from many congresses and conferences, and more than 200 doctoral and candidate theses are defended. In 1982, "Nauka" published I. Vekua's monograph, which was translated into English (Vekua 1985) by T. Gabeskiria and Georgian (1987) by T. Meunargia. This book represents a kind of encyclopedic work, where critical analysis of the author's publications in relation to hierarchical works is presented, particularly, we read: "the system (7. 18h, i) is a strong elliptic system of PDEs for $N \geq 3$ "but we don't rewrite this one in a more expanded form and shall not deal with the investigation of problems of existence and uniqueness in the general form (Vekua 1985: 59,60), and further," the solutions of boundary value problems are not consistent with the boundary conditions on the front surfaces. Therefore, these approximations can turn out to be very rough near the front surfaces (Vekua 1985: 86). A new class of two-dimensional differential systems is discussed, which on the one hand significantly expands the set of "so-called refined theories", and on the other hand, it represents special problems of the most important class for practice, such as a) a statically defined problem of the theory of shells, b) determination of the deformation of a shell with holes, compatible with the kinematic conditions of the bonds given on their boundaries, c) in the theory of shells, the so-called problems of the existence of neutral surfaces and their geometric determination. In (Vekua 1985), Chapters III-V, it is described in detail that the study of the tasks of the mentioned class and the study of the corresponding representations of the essentially defining parameters "will lead to fruitful applications of the theories of analytic and generalized analytic functions (Vekua 1985: 5). This work along with the demonstration of the unity of the whole creative activities Vekua, may be understood as a direct application of the achievements of the theory of solid mechanics in the line of projecting practical tasks of an engineering nature.

The works of A. Tvalchrelidze, which he presented in a unified form in his dissertation: "The theory of shells with several base surfaces and some of its applications" (Tvalchrelidze 1994), should be considered an important achievement. (It is our duty to translate and publish this work). The main approach that distinguishes this approach from classical refined theories is that the shell is divided into several base layers and for each layer, physical and geometrical assumptions are considered regarding the quantities determined by the corresponding coordinates of the surfaces of the layer. A new class of refined theories was created in displacement vector terms. There have been solved and introduced a number of practical tasks, including modeling of the radial keratotomy operation of the eye membrane, by means of numerical methods and software packages.

თ. ვაშაკმაძე

In this work will also discuss the expansion of the approaches of I. Vekua and A. Tvalchrelidze, both in the direction of hierarchical and refined theories (Vashakmadze 1999).

1.1. The method of construction of refined theories and new analogous models (without SH with arbitrary control parameters and having continuum capacity) were elaborated. The exact analytical expressions were found for the corresponding remainder vector. Using those expressions and by applying new technology for error transition the unimprovable estimates were obtained, which represents the fact of negative invention. The principal aspects of those estimates are the same as Chladny's (*Ernst Florens Friedrich Chladni*) experiments for vibrating plates. Many principal authors in this field (including *Euler, Bernoulli, German, Navier, Kirchhoff, Love, Filon, Poincare, von Kármán, Timoshenko, Reissner, Henky, Mindlin, Goldenveiser, Landau, Donnel, Vorovich, Vekua, Koiter, Naghdy, Ambartsumian, Vashicu, Lucasievich, Antman, Ball, Ciarlet, Destuynder,...*) assumed that their theories gave an approximation (in physical, geometrical, asymptotical or other meanings) to initial 3D BVP for thin-walled structures of theory of elasticity, but we proved that for each one from finite theories, the transition error is bounded from below. We can cite here Edgar Allan Poe's words: "And yet, for centuries, no man, in verse, has ever done, or ever seemed to think of doing an original thing. The fact is that originality (unless in minds of very unusual force) is by no means a matter, as some suppose, of impulse or intuition ... A positive merit of the highest class demands in its attainment less of invention than negation" (*The Philosophy of Composition, 1846*).

1.2. In the second chapter of (Vashakmadze 1999) regular (Vekua-Kantorovich type-hierarchical) processes are studied. Provisions of marginal density, approximation, error estimation, and collection of processes are approved. Vekua-type process is considered when the linear form of stress tensor and displacement vector is given on plate elements. In the direction of the foundation of Vekua-Kantorovich type methods, the issues related to the basis of Jacobian polynomials are studied, for the residual term of the Fourier-Legendre series, a simultaneous evaluation of the thickness and the order of approximation is obtained for the function classes: for the corresponding boundary value problems of the Vekua type differential equation system: 1) all $N \leq \infty$ Korn-type a priori estimates are fair, 2) an exact estimate for the error of transition in Sobolev space with respect to the thickness and order of approximation is obtained and a set of relevant processes is approved, 3) Gaussian and Heinz Rutishauser-type factorized schemes are constructed, by means of which an approximate solution is determined for any finite for N .

1.3. A new regular (spline-approximation-based) method for the approximate solution of the 3-dimensional boundary value problem is developed. The process of solving the system of corresponding differential problems is reduced by inverting the operator of a relatively simple structure m times in parallel mode, where m is the number of pseudo-layers and determines the accuracy of the approximation. The evaluation of the transition error and the compilation of the corresponding process are performed using functional analysis methods based on a priori inequalities and Lax-Milgram-Babushka technology. It is easy to see that the given hierarchical model is a generalization of (Tvalchrelidze 1994). Along with this, it should be emphasized that the conditions given in the three-dimensional problem of solving the hierarchical model discussed in (Vashakmadze 1999) are satisfied on the face surfaces of the thin-walled structure as the main (Dirichlet type) and not as natural (Neumann type) conditions.

The scheme above is analogous to Kurt Gödel's theorems on system completeness. As is well known, in the 30s of the last century Gödel showed (unlike the followers of David Hilbert) the incompleteness of formal arithmetic. Indeed, it derives from the analysis of specified theories. that von Karman-Mindlin-Reissner type models are an incomplete system in terms of approximation to three-dimensional problems; Along with this, it should be noted that if Chladny's experiment showed the inadvisability of using the Euler-Bernoulli model, we have shown that for any model of the class of refined theories the bounding of the transition error from below. Also, as a result of the investigation of the hierarchical type models, it follows that the Hilbert-Gödel system is according to approximation and collection. The given reasoning is a demonstration of the unity characteristic of mathematics, and an ideological breakthrough in one of its fields inevitably leads to the existence of a similar fact in another field.