ანალიზი

ჩეზაროსა და ბორელის სიმეტრიული წარმოებულების შესახებ

ერეკლე ჯაფარიძე
erekle.japaridze@atsu.edu.ge
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო
https://doi.org/10.52340/atsu.2024.23.01.20

ნაშრომში განიხილება ჩეზაროსა და ბორელის წარმოებულების ზოგიერთი თვისება. დადგენილია, რომ ლებეგის აზრით, ჯამებადი ფუნქციისათვის ჩეზაროსა და ბორელის პირველი რიგის სიმეტრიული(ჩვეულებრივი) წარმოებულების ცნებები ტოლფასია. შესწავლილია დამოკიდებულება ბორელისა და ჩეზაროს ჩვეულებრივ და სიმეტრიულ წარმოებულებს შორის დადებითი ზომის სიმრავლეზე. ნაჩვენებია ფუნქციის ჩვეულებრივ და სიმეტრიულ წარმოებულებს შორის დამოკიდებულების ა.ი.ხინჩინის თეორემის მსგავსი დამოკიდებულება ბორელისა და ჩეზაროს ჩვეულებრივ და სიმეტრიულ წარმოებულებს შორის დადებითი ზომის სიმრავლეზე. კერძოდ თუ რაიმე დადებითი ზომის სიმრავლეა, და ამ სიმრავლის ყოველ წერტილში არსებობს ჩეზაროს (შესაბამისად ბორელის) სიმეტრიული წარმოებული, მაშინ თითქმის ყველგან ამ სიმრავლეზე არსებობს სიმეტრიული წარმოებულის ტოლი ჩეზაროს (შესაბამისად ბორელის) წარმოებული. ნაჩვენებია აგრეთვე, რომ ჯამებად ფუნქციას უსასრულოდ დიდი ჩეზაროს (შესაბამისად ბორელის) სიმეტრიული წარმოებული შეიძლება გააჩნდეს ნულ ზომის სიმრავლეზე.

საკვანძო სიტყვები: *ჩეზაროს და ბორელის სიმეტრიული და ჩვეულებრივი წარმოებულბი.*

1. ძირითადი ცნებები და აღნიშვნები. დავუშვათ f ფუნქცია განსაზღვრულია რიცხვითი წრფის რაიმე x წერტილის მიდამოში. თუ არსებობს მეორე რიგის პოლინომი $P(t)=P_1(t)=a_0+a_1t+\frac{a_2}{2!}t^2$, სადაც $a_0=f(x_0)$, ისეთი, რომ

$$f(x+t)=P(t)+o(t^2), \quad \text{როცა } t\to 0. \qquad (1)$$

მაშინ a_2 რიცხვს ეწოდება f ფუნქციის მეორე რიგის განზოგადოებული წარმოებული და აღინიშნება ასე $a_2=f_{(2)}(x)$.

თუ ფუნქციას გააჩნია $f_{(2)}(x)$ წარმოებული, მაშინ ეს წარმოებული განისაზღვრება ცალსახად. მართლაც დავუშვათ, რომ არსებობს კიდევ ერთი მეორე რიგის მრავალწევრი $Q(t)$, რომლისთვისაც სრულდება (1) პირობა. მაშინ გვაქვს, რომ

$P(t)-Q(t)=o(t^2)$, როცა $t\to 0$,

რაც იმაზე მიგვანიშნებს, რომ $P(t)\equiv Q(t)$.

განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ არსებობს $f_{(2)}(x)$, მაშინ ფუნქციას გააჩნია ჩვეულებრივი წარმოებული $f'(x)=a_1$. შებრუნებული დებულება საზოგადოდ სამართლიანი არაა. მაგალითად ფუნქციას

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}; & x\neq 0,\\ 0; & x=0, \end{cases}$$

$x=0$ წერტილში გააჩნია წარმოებული $f'(0)=0$, მაგრამ მარტივად ვუჩვენებთ, რომ $f_{(2)}(0)$ არ არსებობს.

ცხადია ისიც, რომ როცა არსებობს $f''(x)$, მაშინ არსებობს $f_{(2)}(x)$ წარმოებულიც და $f_{(2)}(x)=f''(x)$. პირიქით კი ყოველთვის არ არის სამართლიანი. ვთქვათ

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x^2}; & x\neq 0;\\ 0; & x=0. \end{cases}$$

ცხადია

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2\sin\dfrac{1}{x^2}-2\cos\dfrac{1}{x^2}; & x\neq 0,\\ 0; & x=0. \end{cases}$$

აქედან ვასკვნით, რომ $f''(0)$ არ არსებობს, თუმცა $f(x)=0+0\cdot x+0\cdot x^2+x^2\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$ ტოლობა, როცა $x\neq 0$ გვიჩვენებს, რომ $f_{(2)}(0)=0$.

დაუშვათ f ფუნქცია სასრულია და ჯამებადია x წერტილის მიდამოში.შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\varphi(x,h)=\frac{2}{h^2}\int_0^h\left[f(x+t)-f(x)\right]dt;\quad g(x,h)=\frac{1}{h^2}\int_0^h\left[f(x+t)-f(x-t)\right]dt \qquad (2)$$

f ფუნქციის ჩეზაროს ზედა მარჯვენა წარმოებული x წერტილში განისაზღვრება ასე $C^+f(x)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\varphi(x,h)=\limsup_{h\to 0^+}\varphi(x,h)$. ანალოგიურად განისაზღვრებიან ჩეზაროს დანარჩენი $C_+f(x)$, $C^-f(x)$ და $C_-f(x)$ წარმოებულები. შესაბამისად

$C^{*}f(x)=\max\{C^{+}f(x);C^{-}f(x)\}$ და $C_{*}f(x)=\min\{C_{+}f(x);C_{-}f(x)\}$ რიცხვებს ეწოდებათ ჩეზაროს ზედა და ქვედა წარმოებულები. თუ $C^{*}f(x)=C_{*}f(x)$, მაშინ მათ საერთო მნიშვნელობას $Cf(x)$-ს, ეწოდება f ფუნქციის ჩეზაროს წარმოებული x წერტილში. ჩეზაროს ზედა და ქვედა სიმეტრიული წარმოებულები განისაზღვრებიან შემდეგნაირად

$$\overline{C_S}f(x)=\overline{\lim_{h\to0^+}}g(x,h)=\lim_{h\to0^+}\sup g(x,h),$$

$$\underline{C}_S f(x)=\underline{\lim}_{h\to0^+}g(x,h)=\lim_{h\to0^+}\inf g(x,h).$$

თუ $\overline{C_S}f(x)=\underline{C}_S f(x)=C_s f(x)$, მაშინ $C_S f(x)$-ს ეწოდება ჩეზაროს სიმეტრიული წარმოებული x წერტილში.

დაუშვათ f ჯამებადია x წერტილის მიდამოში. მაშინ სიდიდეს

$$B^{+}f(x)=\overline{\lim_{h\to0^+}}\;\overline{\lim_{\varepsilon\to0^+}}\frac{1}{h}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}dt,$$

ეწოდება f ფუნქციის ბორელის ზედა მარჯვენა წარმოებული x წერტილში. ანალოგიურად განისაზღვრებიან ბორელის დანარჩენი $B_{+}f(x);\,B^{-}f(x)$ და $B_{-}f(x)$ წარმოებულები. თუ ყველა ეს წარმოებულები ტოლია, მაშინ მათ საერთო $Bf(x)$ ნიშვნელობას ეწოდება ბორელის წარმოებული x წერტილში. ბორელის ზედა და ქვედა სიმეტრიული წარმოებულები განისაზღვრებიან ტოლობებიდან:

$$\overline{B}_s f(x)=\overline{\lim_{h\to0^+}}\;\overline{\lim_{\varepsilon\to0^+}}\frac{1}{h}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt,$$

$$\underline{B}_s f(x)=\underline{\lim}_{h\to0^+}\;\underline{\lim}_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{h}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt.$$

თუ $\overline{B_S}f(x)=\underline{B}_S f(x)=B_s f(x)$, მაშინ $B_s f(x)$-ს ეწოდება f ფუნქციის ბორელის წარმოებული x წერტილში.

ვიტყვით რომ f უწყვეტია ჩეზაროს აზრით ანუ c-უწყვეტია x წერტილში თუ,

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}f(t)dt=f(x).$$

ცხადია, რომ ჯამებადი ფუნქციისათვის თითქმის ყველა წერტილი წარმოადგენს c-უწყვეტობის წერტილს.

შევნიშნოთ, რომ როცა არსებობს $f'(x)$ წარმოებული, მაშინ არსებობს ბორელისა და ჩეზაროს წარმოებულები და სრულდება პირობა $f'(x)=B_1 f(x)=C_1 f(x)$. შებრუნებული დებულება საზოგადოდ არ არის მართებული. მაგალითისათვის განვიხილოთ ასეთი ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in R\setminus Q,\\ 0, & x\in Q.\end{cases}$$

ცხადია $B_1 f(0)=C_1 f(0)=0$, მაგრამ $f'(0)$ არ არსებობს.

$$D_2 f(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2},$$

დავუშვათ f ფუნქცია ჯამებადია x წერტილის მიდამოში. თუ არსებობს ზღვარი მაშინ მას ეწოდება მეორე რიგის სიმეტრიული (ან კიდევ შვარცის) წარმოებული. თუ ამ ტოლობაში ავიღებთ ზედა ან ქვედა ზღვრებს მივიღებთ შესაბამისად შვარცის ზედა და ქვედა სიმეტრიულ წარმოებულებს.

რაც შეეხება სიმეტრიულ წარმოებულს, როგორც ცნობილია იგი განისაზღვრება ასეთნაირად

$$Df(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.$$

ცხადია, როცა არსებობენ წარმოებულები $f'(x)$, ან $C_1 f(x)$, მაშინ $Df(x)=f'(x)$ ან $C_1 f(x)=SC_1 f(x)$. პირიქით კი არა. მართლაც დავუშვათ

$$f(x)=\begin{cases} |x|; & x\in R\setminus Q,\\ 0; & x\in Q.\end{cases}$$

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ $Df(0)=SBf(0)=SC_1 f(0)=0$. მაგრამ ჩეზაროს მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულებისათვის $x=0$ წერტილში გვაქვს:

$$C_1 f(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{2}{h^2}\int_0^h\left[f(t)-f(0)\right]dt=1;$$

$$C_1 f(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{2}{h^2}\int_0^h\left[f(t)-f(0)\right]dt=-1.$$

მაშასადამე $C_1 f(0)$ არ არსებობს და მაშინ არ იარსებებს არც $f'(0)$.

ცხადია ისიც, რომ თუ ფუნქციას აქვს x წერტილში სასრული $f_{(2)}(x)$ წარმოებული, მაშინ არსებობს $D_2 f(x)$-იც და $f_{(2)}(x)=D_2 f(x)$. შებრუნებული დებულება საზოგადოდ სამართლიანი არ არის. მართლაც, განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}; & x\neq 0,\\ 0; & x=0,\end{cases}$$

რომლისთვის არ არსებობს $f_{(2)}(0)$ წარმოებული, მაგრამ $D_2f(0)$ არსებობს და $D_2f(0)=0$.

ასევე, როცა არსებობს $Df(x)$, მაშინ არსებობენ $SB_1f(x)$ და $SC_1f(x)$ წარმოებულებიც და სამართლიანია ტოლობა $Df(x)=SB_1f(x)=SC_1f(x)$. მოვიყვანოთ მაგალითი რომელიც გვიჩვენებს, რომ შებრუნებულ დებულებას საზოგადოდ ადგილი არა აქვს. დავუშვათ

$$f(x)=\begin{cases}\cos x; & x\in\Im,\\ x; & x\in Q.\end{cases}$$

ცხადია $SB_1f(0)=SC_1f(0)=1$, მაგრამ $Df(0)$ არ არსებობს. რაც შეეხება ჩეზაროსა და ბორელის სიმეტრიულ და ჩვეულებრი წარმოებულებს შორის დამოკიდებულებას მას ცოტა მოგვიანებით განვიხილავთ.

მიღებული შედეგები

2. ლემები ჩეზაროსა და ბორელის სიმეტრიული წარმოებულების შესახებ.

ლემა 1: თუ ჯამებადი ფუნქცია C-უწყვეტია x წერტილში, მაშინ

$$\underline{C}_sf(x)\le\underline{B}_sf(x)\le\overline{B}_sf(x)\le\overline{C}_sf(x), \qquad (3)$$

დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ (2) მივიღებთ

$$\frac{1}{h}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt=\frac{1}{2h}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{1}{t}d\left(\int_0^t\left[f(x+u)-f(x-u)\right]du\right)=$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{1}{t}d\left(t^2g(x,t)\right)=\frac{1}{2}g(x,h)-\frac{1}{2h}\varepsilon\, g(x,\varepsilon)+\frac{1}{2h}\int_{\varepsilon}^{h}g(x,t)dt.$$

აქედან გვექნება, რომ

$$\frac{1}{2}\inf_{(0,h)}g(x,t)-\frac{1}{2h}\varepsilon\, g(x,\varepsilon)+\frac{h-\varepsilon}{2h}\inf_{(0,h)}g(x,t)\le$$

$$\le\frac{1}{h}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt\le\frac{1}{2}\sup_{(0,h)}g(x,t)-\frac{1}{2h}\varepsilon\, g(x,\varepsilon)+\frac{h-\varepsilon}{h}\sup_{(0,h)}g(x,t).$$

(4)

ვინაიდან f, c-უწყვეტია x წერტილში, ამიტომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\, g(x,\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\left[f(x+t)-f(x)\right]dt=0. \tag{5}$$

გადავიდეთ (4)-ში ზღვარზე როცა $\varepsilon\to 0^+$, გავითვალისწინოთ (5) და გვექნება

$$\inf_{(0,h)} g(x,t)\le \overline{\lim_{\varepsilon\to 0^+}}\frac{1}{h}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt\le \sup_{(0,h)} g(x,t).$$

აქედან კი სიმეტრიული წარმოებულების განსაზღვრის თანახმად მივიღებთ (3) უტოლობას.

ლემა 2: თუ f ჯამებადია x-ის მიდამოში, ხოლო $\overline{B}_S f(x)$ და $\underline{B}_S f(x)$ სასრულია, მაშინ არსებობს არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_0^h\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt \tag{6}$$

და

$$\overline{B}_S f(x)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}\int_0^h\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt$$

$$\underline{B}_S f(x)=\underline{\lim}_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Phi(x,h)=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0^+}}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt,$$

$$\Psi(x,h)=\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt.$$

ვინაიდან $\overline{B}_S f(x)$ და $\underline{B}_S f(x)$ სასრულია და განსაზღვრის თანახმად,

$$\overline{B}_S f(x)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{\Phi(x,h)}{h};\quad \underline{B}_S f(x)=\underline{\lim}_{h\to 0^+}\frac{\Psi(x,h)}{h},$$

ამიტომ

$$\overline{\lim_{h\to 0^+}}\Phi(x,h)=0;\quad \underline{\lim}_{h\to 0^+}\Psi(x,h)=0.$$

ვინაიდან $\Psi(x,h)\le\Phi(x,h)$, ამიტომ $\Phi(x,h)\to 0,\ \Psi(x,h)\to 0$ როცა $h\to 0^+$ და

$$\lim_{h\to 0^+}\left[\Phi(x,h)-\Psi(x,h)\right]=0. \tag{7}$$

თუ $h>0$, და $h+\eta>0$, ამიტომ

$$\Phi(x,h+\eta)-\Phi(x,h)=\overline{\lim_{\varepsilon\to0^+}}\left[\int_\varepsilon^h\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt+\int_h^{h+\eta}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt\right]-$$

$$-\overline{\lim_{\varepsilon\to0^+}}\left[\int_\varepsilon^h\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt\right]. \qquad (8)$$

ვინაიდან ინტეგრალი $\int_h^{h+\eta}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt$, არ არის დამოკიდებული ε-ზე ამიტომ (8)-დან მივიღებთ

$$\Phi(x,h+\eta)-\Phi(x,h)=\int_h^{h+\eta}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\Psi(x,h+\eta)-\Psi(x,h)=\int_h^{h+\eta}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt.$$

ამრიგად

$$\Phi(x,h+\eta)-\Phi(x,h)=\Psi(x,h+\eta)-\Psi(x,h),$$

ანუ

$$\Phi(x,h+\eta)-\Psi(x,h+\eta)=\Phi(x,h)-\Psi(x,h). \qquad (9)$$

დავუშვათ $F(x,h)=\Phi(x,h)-\Psi(x,h),\quad h_1>0$ და $\eta=h_1-h$. მაშინ (9)-ს ძალით მივიღებთ

$$F(x,h_1)=\Phi(x,h+\eta)-\Psi(x,h+\eta)=\Phi(x,h)-\Psi(x,h)=F(x,h).$$

ეს აღნიშნავს, რომ $\Phi(x,h)-\Psi(x,h)$ სხვაობა არ არის დამოკიდებული h-ზე. ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ (7)-ს, მივიღებთ,რომ როგორიც არ უნდა იყოს $h>0,\ \Phi(x,h)=\Psi(x,h)$, ანუ

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to0^+}}\int_\varepsilon^h\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt=\underline{\lim_{\varepsilon\to0^+}}\int_\varepsilon^h\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt.$$

ლემა დამტკიცებულია.

3. ჩეზაროსა და ბორელის წარმოებულების ექვივალენტობა. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^3};\ x\in(0;+1],\\ 0;\quad x\in[-1;0],\end{cases}$$

და ვაჩვენოთ, რომ ის არ არის ინტეგრებადი ლებეგის აზრით $[-1;+1]$-ზე. დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ $f\in L(-1;+1)$. მაშინ $|f|\in L(-1;+1)$ და როგორიც არ უნდა იყოს $a\in(0,1)$ მივიღებთ

$$\int_0^1 |f(x)|dx \ge \int_a^1 \frac{\left|\sin\left(x^{-3}\right)\right|}{x}dx = \frac{1}{3}\int_1^{1/a^3} \frac{|\sin t|}{t}dt \to +\infty$$

როცა $a \to 0^+$. ეს წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ f არ არის ინტეგრებადი $[-1;+1]$-ზე. ვინაიდან ნებისმიერი $t \in (0,1)$-ის, $f(t) - f(-t) = f(t)$ და f არ არის ინტეგრებადი ამიტომ არ იარსებებს $C_S f(0)$. რაც შეეხება ბორელის სიმეტრიულ წარმოებულს ის არსებობს $x = 0$ წერტილში. მართლაც, როგორიც არ უნდა იყოს $x \ne 0$ სამართლიანია ტოლობა

$$\left(x^2 \cos\frac{1}{x^3}\right)' = 2x\cos\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2}\sin\frac{1}{x^3}.$$

აქედან გამოდის, რომ

$$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^3} = \frac{1}{3}\left(x^2\cos\frac{1}{x^3}\right)' - \frac{2}{3}x\cos\frac{1}{x^3}.$$

ამიტომ, როცა $0 < \varepsilon < h$, გვაქვს

$$\int_\varepsilon^h \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{3}h^2\cos\frac{1}{h^3} - \frac{1}{3}\varepsilon^2\cos\frac{1}{\varepsilon^3} - \frac{2}{3}\int_\varepsilon^h x\cos\frac{1}{x^3}dx.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს გააჩნია ზღვარი როცა $\varepsilon \to 0^+$. ამის გამო განსაკუთრებული ინტეგრალი $\dfrac{f(x)}{x}$ ფუნქციიდან არსებობს და

$$\int_0^h \frac{f(x)}{x}dx = \int_0^h \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{3}h^2\cos\frac{1}{h^3} - \frac{2}{3}\int_0^h x\cos\frac{1}{x^3}dx = o(h) \quad \text{როცა}$$

$h \to 0^+$.

ეს ნიშნავს, რომ $B_S f(0) = 0$.

ამრიგად f ფუნქციას $x = 0$ წერტილში, გააჩნია ბორელის სიმეტრიული წარმოებული მაგრამ ამ წერტილში არ არსებობს ჩეზაროს სიმეტრიული წარმოებული. აღმოჩნდა, რომ ლებეგის აზრით ჯამებადი ფუნქციისათვის ამ წარმოებულთა ცნებები ექვივალენტურია.

მართლაც, ვთქვათ f ფუნქციას x წერტილში გააჩნია სიმეტრიული $B_S f(x)$ წარმოებული. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $B_S f(x) = 0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილოთ $f(t) - B_S f(x)\cdot t$ ფუნქცია $f(t)$-ს ნაცვლად.

ვინაიდან $\overline{B}_S f(x)$ და $\underline{B}_S f(x)$ სასრულია ამიტომ ლემა 2-ის ძალით არსებობს სინგულარული ინტეგრალი (6), და შეიძლება განვიხილოთ ფუნქცია

$$\Phi(h)=\int_0^h \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt; \quad \Phi(0)=0 .$$

დავუშვათ $\varepsilon>0$ მოცემულია. ვინაიდან $B_S f(x)=0$, ამიტომ შეიძლება $\delta>0$ შევარჩიოთ ისე, რომ

$$\left|\Phi(h)\right|<\frac{\varepsilon h}{3}, \tag{10}$$

როცა $0<h<\delta$.

თუ მოვახდენთ ნაწილობით ინტეგრებას და მხედველობაში მივიღებთ (10), გვექნება

$$\left|\frac{2}{h^2}\int_0^h\left[f(x+t)-f(x-t)\right]dt\right|=\left|\frac{2}{h^2}\int_0^h td\Phi(t)\right|\le\left|\frac{2}{h}\Phi(h)\right|+$$

$$+\frac{2}{h^2}\int_0^h\left|\Phi(t)\right|dt\le\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}.$$

ამრიგად, $C_S f(x)$ არსებობს და $C_S f(x)=B_S f(x)=0$.

შებრუნებული დებულება გამომდინარეობს (3)-დან.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ექვივალენტობის ანალოგიურ ფაქტს ადგილი აქვს ჩეზაროს $C_1 f(x)$ და ბორელის $B_1 f(x)$ წარმოებულებისთვისაც.

4. **ა.ი. ხინჩინის თეორემის ანალოგი ჩეზაროსა და ბორელის წარმოებულებისათვის.** ამ პუნქტში შევისწავლით დამოკიდებულებას ბორელისა და ჩეზაროს ჩვეულებრივ და სიმეტრიულ წარმოებულებს შორის დადებითი ზომის სიმრავლეზე. ამგვარი დამოკიდებულება პირველად შესწავლილი იქნა ა.ი. ხინჩინის მიერ (Хинчин 1929), რომელმაც უჩვენა, რომ, თუ ზომად ფუნქციას დადებითი ზომის სიმრავლეზე გააჩნია სიმეტრიული $Df(x)$ წარმოებული, მაშინ თითქმის ყველგან ამ სიმრავლეზე არსებობს ჩვეულებრივი $f'(x)$ წარმოებული და $Df(x)=f'(x)$. ანალოგიური შედეგი მაღალი რიგის განზოგადოებული წარმოებულებისათვის აჩვენეს ი. მარცინკევიჩმა და ა. ზიგმუნდმა (Marcinkiewicz, Zygmund 1936), რომლებმაც დაამტკიცეს, რომ თუ დადებითი ზომის სიმრავლეზე არსებობს $D_2 f(x)$ წარმოებული, მაშინ თითქმის ყველგან ამ სიმრავლეზე არსებობს მისი ტოლი $f_2(x)$ წარმოებული.

ბუნებრივია დავსვათ ასეთი კითხვა. სამართლიანია თუ არა ა.ი. ხინჩინის ანალოგიური შედეგი ჩეზაროსა და ბორელის წარმოებულებისათვის?

დავუშვათ $E\subset R$ რაიმე დადებითი ზომის სიმრავლეა, და ამ სიმრავლის ყოველ წერტილში არსებობს ჩეზაროს სიმეტრიული

წარმოებული. ვთქვათ $x \in E$ და F არის f ფუნქციის პირველყოფილი. რადგან x წერტილში არსებობს $SC_1 f(x)$, ამიტომ ვწერთ პირობას

$$\int_0^h \left[f(x+t) - f(x-t) \right] dt = SC_1 f(x) h^2 + o\left(h^2\right), \text{ როცა } h \to 0,$$

რომელიც ტოლფასია პირობისა

$$F(x+h) + F(x-h) - 2F(x) = SC_1 f(x) h^2 + o\left(h^2\right), \text{ როცა } h \to 0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ E სიმრავლის ყოველ წერტილში არსებობს $D_2 F(x)$ სიმეტრიული წარმოებული და $D_2 F(x) = SC_1 f(x)$. ვისარგებლოთ ა. მარცინკევიჩისა და ა. ზიგმუნდის შედეგით და მივიღებთ, რომ თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე არსებობს $F_{(2)}(x)$ წარმოებული და $D_2 F(x) = F_{(2)}(x)$. თუ x წერტილი წარმოადგენს C_1-უწყვეტობის წერტილს და ამ წერტილში არსებობს $F_{(2)}(x)$, მაშინ ცხადია $F_{(1)}(x) = F'(x) = f(x)$ და x-ის მიდამოში გვაქვს

$$F(x+h) = F(x) + f(x) h + \frac{F_{(2)}(x)}{2!} h^2 + o\left(h^2\right), \qquad h \to 0,$$

საიდანაც ვწერთ

$$\frac{2}{h^2} \int_0^h \left[f(x+t) - f(x) \right] dt = F_{(2)}(x) + o(1), \text{ როცა } h \to 0.$$

მაშასადამე, როცა x წარმოადგენს ფუნქციის C-უწყვეტობის წერტილს და არსებობს $F_{(2)}(x)$, მაშინ არსებობს $C_1 f(x)$ და $C_1 f(x) = F_{(2)}(x)$. რადგან E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილი C_1-უწყვეტობის წერტილია, ამიტომ საბოლოოდ ვასკვნით, რომ თითქმის ყველგან E-ზე არსებობს $C_1 f(x)$ და $C_1 f(x) = SC_1 f(x)$. ამრიგად ა.ი. ხინჩინის თეორემის ანალოგი სამართლიანია ჩეზაროსა და ბორელის წარმოებულებისათვისაც.

5. სიმეტრიული წარმოებული რიცხვების ყოფაქცევის შესახებ. როგორც უკვე აღინიშნა ჩეზაროს აზრით ჩვეულებრივი და სიმეტრიული დიფერენცირებადობები, იძლევიან ერთსა და იმავე შედეგს, სიზუსტით ნული ზომის სიმრავლემდე. ამასთან დაკავშირებით ისმის ორი კითხვა: აქვს თუ არა ნულის ტოლი ზომა სიმრავლეს, რომელზეც ჩეზაროს სიმეტრიული წარმოებული არის უსასრულოდ დიდი, და მეორე, რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ სიმეტრიული წარმოებული რიცხვები, დადებითი ზომის სიმრავლეზე, რომ გარანტირებული იყოს SC_1 წარმოებულის არსებობა ამ სიმრავლეზე.

ი. ბ. გერმეიერის მიერ (Гермейер 1943), ნაჩვენები იქნა, რომ ზომადი f ფუნქციისათვის დადებითი ზომის სიმრავლეზე ან თითქმის ყველგან არსებობს $D_2 f(x)$ (სათანადოდ $Df(x)$) სიმეტრიული წარმოებული, ან თითქმის ყველგან ამ სიმრავლეზე $\underline{D}_2 f(x) = -\infty$ და $\overline{D}_2 f(x) = +\infty$ (სათანადოდ $\underline{D} f(x) = -\infty$ და $\overline{D} f(x) = +\infty$).

ჩვენი ამოცანაა ვუჩვენოთ, რომ ანალოგიური შედეგი სამართლიანია ბორელისა და ჩეზაროს სიმეტრიული წარმოებული რიცხვების შემთხვევაშიც. ვთქვათ F არის f ფუნქციის პირველყოფილი x წერტილის მიდამოში. თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას

$$\int_0^h \left[f(x+t) - f(x-t) \right] dt = F(x+h) + F(x-h) - 2F(x),$$

გვექნება $\overline{S}C_1 f(x) = \overline{D}_2 F(x)$ და $\underline{S}C_1 f(x) = \underline{D}_2 F(x)$. თუ F ფუნქციისთვის გამოვიყენებთ გერმეიერის თეორემას, მივიღებთ, რომ ჯამებად f ფუნქციას დადებითი ზომის E სიმრავლეზე ან თითქმის ყველგან გააჩნია სიმეტრიული $SC_1 f(x)$ წარმოებული, ან თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე $\overline{S}C_1 f(x) = +\infty$ და $\underline{S}C_1 f(x) = -\infty$.

მიღებულიდან ვასკვნით, რომ ჯამებად ფუნქციას დადებითი ზომის სიმრავლეზე უსასრულოდ დიდი სიმეტრიული წარმოებული $SC_1 f(x)$ შეიძლება გააჩნდეს ნულის ტოლი ზომის სიმრავლეზე, და ასევე, თუ დადებითი ზომის E სიმრავლეზე $\overline{S}C_1 f(x) < +\infty$ ან $\underline{S}C_1 f(x) > -\infty$, მაშინ თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე, არსებობს $SC_1 f(x)$ წარმოებული.

ლიტერატურა

Marcinkiewicz, J. and A. Zygmund. 1936. “On the differentiability of functions and summability of trigonometric series”. *Fund. Math.* 26, 1936: 1-43.

Гермейер, Ю.Б. 1943. „О симметрических производных числах Математический сборник“. т. 12(54). N.1,1943.

Хинчин, А.Я. 1929. „Исследование о строении измеритых функций“. *Матем. сб.* XXX1: 2, 1929: 265-286.

Analysis

On the Cesaro and Borel symmetric derivatives

Erekle Japaridze
erekle.japaridze@atsu.edu.ge
Akaki Tsereteli State University
Kutaisi, Georgia
https://doi.org/10.52340/atsu.2024.23.01.20

The paper discusses some properties of Cesaro and Borel derivatives. It was established that, according to Lebesgue, the concepts of Cesaro and Borel first-order symmetric (ordinary) derivatives are equivalent for a summable function. The dependence has been studied of the ordinary and symmetric Borel and Cesaro derivatives on the set of positive. In particular, if is a set of any positive measure, and at every point of this set there exists a symmetric Cesaro (respectively Borel) derivative, then almost everywhere on this set, there exists a Cesaro (respectively Borel) derivative equal to the symmetric derivative. It is also shown that a summable function can have an infinitely large Cesaro (respectively Borel) symmetric derivative on a set of zero measure.

Keywords. *Cesaro and Borel symmetric and ordinary derivatives.*

Main definitions and notations. Let the function f be finite and summable in the neighborhood of a point x. Let us introduce notations

$$\varphi(x,h)=\frac{2}{h^2}\int_0^h\left[f(x+t)-f(x)\right]dt;\quad g(x,h)=\frac{1}{h^2}\int_0^h\left[f(x+t)-f(x-t)\right]dt$$

The upper right-hand Cesaro derivative of the function f at the point x is determined as follows: $C^+f(x)=\overline{\lim_{h\to0^+}}\varphi(x,h)=\lim_{h\to0^+}\sup\varphi(x,h)$. Similarly, we determine the other Cesaro derivatives $C_+f(x)$, $C^-f(x)$ and $C_-f(x)$. Accordingly, the numbers $C^*f(x)=\max\left\{C^+f(x);C^-f(x)\right\}$ and $C_*f(x)=\min\left\{C_+f(x);C_-f(x)\right\}$ are called the Cesaro upper and lower derivatives. If $C^*f(x)=C_*f(x)$, then their common value $Cf(x)$, is called the Cesaro derivative of the function f at the point x. The Cesaro upper and lower symmetric derivatives are determined as follows

$$\overline{C_S}f(x)=\overline{\lim_{h\to0^+}}g(x,h)=\lim_{h\to0^+}\sup g(x,h),$$

$$\underline{C}_Sf(x)=\underline{\lim}_{h\to0^+}g(x,h)=\lim_{h\to0^+}\inf g(x,h).$$

If $\overline{C_S}f(x)=\underline{C_S}f(x)=C_sf(x)$, then $C_Sf(x)$ is called a Cesaro symmetric derivative at the point x.

Let f be summable in the neighborhood of a point x. Then the value

$$B^+f(x)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0^+}}\frac{1}{h}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}dt$$

is called the upper right-hand Borel derivative of the function f at the point x. Similarly, we determine the other Borel derivatives $B_+f(x)$; $B^-f(x)$ and $B_-f(x)$. If all these derivatives are equal, then their total value $Bf(x)$ is called the Borel derivative at the point x. The upper and lower Borel symmetric derivatives are determined from the equations:

$$\overline{B}_sf(x)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\,\overline{\lim_{\varepsilon\to 0^+}}\frac{1}{h}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt,$$

$$\underline{B}_sf(x)=\underline{\lim}_{h\to 0^+}\ \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt.$$

If $\overline{B_S}f(x)=\underline{B_S}f(x)=B_sf(x)$, then $B_sf(x)$ is called the Borel derivative of the function f at the point x.

The results obtained

1. **An analogue of the theorem of A.Ya. Khinchin for Cesaro and Borel derivatives**. The dependence has been studied of the ordinary and symmetric Borel and Cesaro derivatives on the set of positive measure. This type of dependence was first studied by A.Ya. Khinchin (A.Ya. Khinchin 1929), who showed that if a measurable function has a symmetric derivative on a set of positive measure, then almost everywhere on this set there is an ordinary derivative $f'(x)$ and $Df(x)=f'(x)$. A similar result for the high-order generalized derivatives was shown by J. Marcinkevich and A. Zygmund (J. Marcinkiewicz and A. Zygmund 1936), who proved that if there is a derivative $D_2f(x)$ on a set of positive measure, then almost everywhere on this set, there is a derivative $f_2(x)$ equal to it. It was proven that an analogue of the Khinchin and Marcinkiewicz-Zigmund theorems is also valid for Cesaro and Borel derivatives. In particular, if $E\subset R$ is a set of positive measure, and at every point in this set there exists a symmetric Cesaro derivative, then, almost everywhere on E, there exist $C_1f(x)$ and $C_1f(x)=SC_1f(x)$.

2. **On the behavior of symmetric derived numbers.** As was already mentioned, according to Cesaro, ordinary and symmetric differentiabilities

produce the same results, to an accuracy of a set of zero measure. Two questions arise in this context: does the set on which Cesaro's symmetric derivative is infinitely large have a measure equal to zero, and secondly, what conditions must the symmetric derived numbers on a set of positive measure satisfy to guarantee the existence of a derivative SC_1 on this set?. It was proven that the summable function f on the set of positive measure either has a symmetric derivative $SC_1 f(x)$ almost everywhere, or $\overline{S}C_1 f(x) = +\infty$ and $\underline{S}C_1 f(x) = -\infty$ almost everywhere on the set E.

Based on the result obtained, we arrive at conclusion that a summable function on a set of positive measure can have an infinitely large symmetric derivative $SC_1 f(x)$ on a set of zero measure, and also, if $\overline{S}C_1 f(x) < +\infty$ or $\underline{S}C_1 f(x) > -\infty$ on a set of positive measure, then almost everywhere on the set E, there exists a derivative $SC_1 f(x)$.