ანალიზი

# ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლის სასაზღვრო თვისებები ერთეულოვან წრეში

**გიორგი თეთვაძე**
giorgi.tetvadze@atsu.edu.ge
**ლილი თეთვაძე**
**იური თვალოძე**
**ლამარა ციბაძე**
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,
ქუთაისი, საქართველო
https://doi.org/10.52340/atsu.2024.23.01.19

*ნაშრომში დადგენილია აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ ბლიაშკე - ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლი კრებადი იყოს ერთეულოვანი წრის საღვარზე.*

***საკვანძო სიტყვები:*** *ბლიაშკე - ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლი,კუთხური სასაზღვრო მნიშვნელობები.*

დასაწყისში შემოვიღოთ ზოგიერთი აღნიშვნა და განმარტება:

$\mathbb{C}$ - კომპლექსურ რიცხვთა ველი.

$\mathbb{D} = \{z : |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ -ერთეულოვანი წრე.

$V_\varphi(e^{i\theta}) -$ შტოლცის კუთხე, ე.ი. $e^{i\theta}$ წერტილიდან გავლებული ორი ქორდით შედგენილი $2\varphi - ს, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ტოლი კუთხე, რომლებისთვსაც $[0;\ e^{i\theta}]$ რადიუსი ბისექტრისაა.

$\Delta\varphi(e^{i\theta}, z) = \{z : |z - e^{i\theta}| < 1 - \mathrm{r},\ 0 < r < 1, z \in \mathbb{C},\} \cap V\varphi(e^{i\theta}) - e^{i\theta}$ წერტილის სამკუთხა მიდამო.

$M$ სიმრავლის ჩაკეტვა ავღნიშნოთ - $\overline{M}$-ით.

ზღვარს $\lim\limits_{\substack{z\to e^{i\theta} \\ z\in V\varphi(e^{i\theta})}} f(z) = \lim\limits_{z \rightrightarrows e^{i\theta}} f(z)$ ეწოდება $f$ ფუნქციის კუთხური სასაზღვრო მნიშვნელობა $e^{i\theta}$ წერტილში.

ერთეულოვან წრეში ანალიზური ფუნქცის სასაზღვრო მნიშვნელობის შესწავლის დროს მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ბლიაშკეს ნამრავლი (Bliashke, 1915)

$$B(z, (a_n)) = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} \left(1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n} z}\right),$$

სადაც $\lambda + 1$ ნატურალური რიცხვია, $0 < |a_n| \le |a_{n+1}| < 1, \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1,$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)<+\infty.$$

იმ შემთხვევისთვის, როცა $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)=+\infty$ არსებობს ბლიაშკეს ნამრავლის სხვადასხვა განზოგადებები (Picard 1926, Джербашян 1945, 1948, Тетвадзе 1980, Tsuji 1955).

ბლიაშკე–ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლს (Джербашян, 1945) აქვს სახე

$$\mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n))=z^{\lambda}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)^k\right),$$

სადაც $\lambda+1$ და $p$ ნატურალური რიცხვებია $0<|a_n|\le|a_{n+1}|<1, \lim_{n\to\infty}|a_n|=1, |z|<1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^P=+\infty, \sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^{P+1}<+\infty$$

უსასრულო ნამრავლი $\mathcal{B}_P(z,(a_n))$ თანაბრად და აბსოლიტურად კრებადია ერთეულოვანი ღია წრის შიგნით, რის გამოც იგი წარმოადგენს ანალიზურ ფუნქციას ნულებით

$$\underbrace{0,0,\dots 0}_{\lambda}, a_1, a_2, \dots\ a_n, \dots.$$

შევნიშნოთ, რომ ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლი არის ჯებაშიანის ნამრავლის (Джербашян, 1948) კერძო შემთხვევა.

ფროსტმანმა ბლიაშკეს ნამრავლისათვის დაამტკიცა (Frostamn, 1942) შემდეგი მნიშვნელოვანი **თეორემა 1.**

იმისათვის, რომ ბლიაშკეს $B(z,(a_n))$ ნამრავლს და მის ყველა ქვენამრავლს ჰქონდეს რადიალური ზღვარი მოდულით ერთი $e^{i\theta}$ წერტილში, აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-|a_n|}{|e^{i\theta}-a_n|}<+\infty$$

აღვნიშნოთ $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}$, ხოლო მისი დაგროვების წერტილთა სიმრავლე $A'$ -ით.

კოლველმა (Colwell, 1966) დაამტკიცა **თეორემა 2.**

იმისათვის, რომ არსებობდეს ბლიაშკეს ნამრავლი $B(z,(a_n))$, რომელსაც ერთეულოვანი წრეწირის ყოველ წერტილში გააჩნდეს რადიალური ზღვარი მოდულით ერთი, აუცილებელი და საკმარისია $E=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}'$ იყოს ჩაკეტილი და არსად მკვრივი $\{z:|z|=1, z\in C\}$ერთეულოვან წრეწირზე.

სტატიაში (Tetvadze, Tetvadze, & Tsibadze, 2021) დამტკიცებულია **თეორემა 3.**

თუ, $0<|a_n|<|a_{n+1}|<1, \lim_{n\to\infty}|a_n|<1,$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-a_n)^p=+\infty, \sum_{n=1}^{+\infty}(1-a_n)^{p+1}=+\infty,$$

და $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|e^{i\theta}-a_n|}\right)^{p+1}<+\infty.$

მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{\substack{\wedge \\ z\to e^{i\theta}}} B_{p+1}(z,(a_n))=B_{p+1}\left(e^{i\theta},(a_n)\right)\neq 0,\infty.$$

ქვემოთ განხილულ იქნება ანალოგიური საკითხები ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლსათვის.

**თეორემა 4.** ვთქვათ $E\subset\{z:|z|=1,z\in C\}$. იმისათვის, რომ არსებობდეს ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლი $B_{p+1}(z,(a_n))$, რომლისთვისაც ნებისმიერი $e^{i\theta}$ $(0\le 0<2\pi)$ წერტილში არსებობს კუთხური ზღვარი და სრულდება პირობა

$$\lim_{\substack{\wedge \\ z\to e^{i\theta}}} B_{p+1}(z,(a_n))=B_{p+1}\left(e^{i\theta},(a_n)\right)\neq 0,\infty$$

აუცილებელი და საკმარისია $E$ იყოს ჩაკეტილი და არსად მკრივი სიმრავლე $\{z:|z|=1,z\in C\}$-ში.

**დამტკიცება:** საკმარისობა. ვთქვათ $E$ ჩაკეტილი და არსად მკვრივი სიმრავლეა, თეორემა 2-ის ძალით არსებობს ისეთი მიმდევრობა $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, $\lim_{n\to\infty}|a_n|=1$, $\sum_{n=1}^{+\infty}1-|a_n|<+\infty$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-|a_n|}{|e^{i\theta}-a_n|}<+\infty.$$

რომლის დაგროვების წერტილთა სიმრავლეა $E$ და შესაბამის ბლიაშკეს ნამრავლს აქვს რადიანული ზღვარი მოდულით ერთი, ერთეულოვანი წრეწირის ყოველ წერტილში.

ავღნიშნოთ $b_n=\left(1-\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)$,

სადაც $\sin\frac{\varepsilon_n}{2}=\frac{1}{(p+1)^2\sqrt{n}}$ (1)

ცხადია $\lim_{n\to\infty}b_n=1, 1-|b_n|=\frac{1}{\sqrt[p]{n}}$ (2)

და $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|b_n|)^p=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty,$ $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|b_n|)^{p+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[p]{n^{p+1}}}=+\infty,$

$$(1-|b_n|)=\left|1-\left(1-\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)\cos\varepsilon_n-i\left(1-\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)\sin\varepsilon_n\right|=$$

$$=\sqrt{\left(1-\left(1-\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)\cos\varepsilon_n\right)^2+\left(1-\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)^2 sin^2\varepsilon_n}=$$

$$= \sqrt{1 - 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)\cos\varepsilon_n + \left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)\right)^2 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right) - 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)\cos\varepsilon_n}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\sqrt[p]{n}} + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)(1 + \cos\varepsilon_n)} > \sqrt{4\left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right) sin^2 \varepsilon_n/2}$$

$$> 2\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[p]{2}}}\sin \varepsilon_n/2$$

ე.ი. როცა $n \geq 2$

$$(1 - |b_n|) > 2\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[p]{2}}}\sin \varepsilon_n/2,$$

აქედან თუ აღვნიშნავთ $2\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[p]{2}}} = q > 0$, მაშინ (1) და (2) ძალით მივიღებთ:

$$|1 - b_n| > \frac{q}{\sqrt[(p+1)^2]{n}}$$

ამ უკანასკნელი უტოლობის და (2)-ის გათვალისწინებით

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1 - |b_n|}{|1 - b_n|}\right)^{p+1} < \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[p]{n^{p+1}}}\cdot\sqrt[p+1]{n}}{q^{p+1}} = \frac{1}{q^{p+1}}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sqrt[p+1]{n}}{\sqrt[p]{n^{p+1}}} = \frac{1}{q^{p+1}}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{P+1}{p}+\frac{1}{p+1}}} =$$

$$= \frac{1}{q^{p+1}}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{p^2+p+1}{p(p+1)}}} = \frac{1}{q^{p+1}}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p(p+1)}}} < +\infty$$

ე.ი.

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1 - |b_n|}{|1 - b_n|}\right)^{p+1} < +\infty\,. \qquad (3)$$

თუ $e^{i\theta_0} \in E$ მაშინ (2)-ის ძალით

$$\lim_{n\to\infty} b_n e^{i\theta_0} = e^{i\theta_0} \qquad (4)$$

ახლა გავაერთიანოთ $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ და $\left(b_n e^{i\theta_0}\right)_{n=1}^{+\infty}$ მიმდევრობები და გადავნომროთ თავიდან მოდულის ზრდის შენარჩუნებით. მივიღებთ ახალ $(c_n)_{n=1}^{+\infty}$ მიმდევრობას, რომლის დაგროვების წერტილთა სიმრავლეა $E$, ამასთან, (3) და (4)-ის ძალით

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1 - |c_n|}{|e^{i\theta} - c_n|}\right)^{p+1} < +\infty, (0 \leq 0 < 2\pi)\,.$$

აქედან თეორემა 3-ის ძალით

$$\lim_{\substack{z \to e^{i\theta} \\ \wedge}} B_{p+1}(z,(c_n)) = B_{p+1}\left(e^{i\theta},(c_n)\right) \neq 0, \infty, \forall\theta(0 \leq \theta < 2\pi)$$

აუცილებლობა: ვთქვათ $B_{p+1}(z,(a_n))$ არის ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლი, რომლისთვისაც სრულდება თეორემის პირობები და $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ მიმდევრობის დაგროვების წერტილთა სიმრავლეა $E$. როგორც ცნობილია, დაგროვების წერტილთა სიმრავლე ყოველთვის ჩაკეტილია, ე.ი. $E$ სიმრავლე ჩაკეტილია. აღვნიშნოთ $C(B_{p+1}, e^{i\theta})$ -ით $B_{p+1}(z,(a_n))$ ფუნქციის ზღვრული სიმრავლე $e^{i\theta}$ წერტილში (Seidel 1934) . ცხადია,

$$0 \in C(B_{p+1,} e^{i\theta}) \text{ და } 0 \notin C_r(B_{p+1,} e^{i\theta}), \text{ როცა } e^{i\theta} \in E,$$

სადაც $C_r(B_{p+1,} e^{i\theta})$ არის $B_{p+1,}(z,(a_n))$ ზღვრული სიმრავლე რადიუსის გასწვრივ, ე.ი.

$$C(B_{p+1,} e^{i\theta}) \neq C_r(B_{p+1,} e^{i\theta}).$$

ამიტომ კოლინგუდის (Collingwood 1958) თეორემის ძალით $E$ სიმრავლე არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე, ე.ი. $E$ წარმოდგინდება არსად მკვრივი სიმრავლეების სასრული ან თვლადი სიმრავლეების გაერთიანების სახით და რადგან იმავე დროს $E$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე, ამიტომ ის იქნება არსად მკვრივი სიმრავლე (Colwell 1966).

თეორემა დამტკიცებულია.

## ლიტერატურა


Bliashke, W. 1915. Eine Erweitezung des latses von Vitali uber Folgen anlytischez Functuionen. Leipziger Berichte, 194-200.

Collingwood, E. F. (1958). Gluster sets prime ends, Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. N250. 13.

Colwell, P. (1966). On The boundary Behavior of Blaschke produts in the unit disk, Proc. Amer. Math Soc. v. 17, №3б . 582-587.

Frostamn, O. (1942). ur les produits de Blaaschke, Kungl. Fysiogr.Sallsk.Lund Forh. 12. 169-182.

Picard, E. (1926). Traitc d'Analyse.

Tetvadze, G., Tetvadze, L., & Tsibadze, L. (2021). On boundary properties of the boundary values of Blshke-Djerbashian Canonical product. Moambe, 195-201.

Tsuji, M. (1956). Canonical product for a meromorphic function in a unit circle. Jurnal of the Mathematic Society of Japan, Vol 8, N1.

Джербашян, М. М. (1945). О каноническом представлении мероморфных в единственном круге функции. Армянский ССР 3, N1, 3-9.

Джербашян, М. М. (1948). К проблеме представитимости аналитических функций. Сообщение, Институт математики и механики, Вип N2, 3-40.

Тетвадзе, Г. (1980). О граничных своиствах произведений типа Бляшке в единичном круге. Сообщение, Академия наук, ГССР, 99, N3, 537-539.

## Analysis

# On the Boundary Behavior of Blaschke-Djerbashyan Canonical Product in the UNIT disk

**Giorgi Tetvadze**
giorgi.tetvadze@atsu.edu.ge
**Lili Tetvadze**
**Iuri Tvalodze**
**Lamara Tsibadze**
Akaki Tsereteli State University
Kutaisi, Georgia
https://doi.org/10.52340/atsu.2024.23.01.19

*The paper establishes necessary and sufficient conditions for Blaschke–Djerbashyan Canonical product, to be convergent on the boundary of the unit circle.*

***Keywords:*** *Canonical product of Blaschke - Djerbashyan, angular boundary values.*

For the beginning, there are some definitions:

$\mathbb{C}$ - the Field of complex numbers.

$\mathbb{D} = \{z: |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ - Unit disk.

$V_\varphi(e^{i\theta}) -$ Stolz Angle, i.e. Angle equal to $2\varphi, 0 < \varphi < \pi/2$ and formed by two chords passing through the point $e^{i\theta}$ for which the radius $[0;\ e^{i\theta}]$ is the bisector.

$\Delta\varphi(e^{i\theta}, z) = \{z: |z - e^{i\theta}| < 1 - \mathrm{r},\ 0 < r < 1, z \in \mathbb{C},\} \cap V\varphi(e^{i\theta}) -$ Triangular neighborhood of the $e^{i\theta}$point.

By $\overline{M}$ denote the closure of the set $M$.

The limit $\lim\limits_{\substack{z\to e^{i\theta}\\ z\in V\varphi(e^{i\theta})}} f(z) = \lim\limits_{z \hat{\to} e^{i\theta}} f(z)$ is the angular boundary value of the function $f$ in the $e^{i\theta}$ point.

Blaschke product plays an important role in the study of boundary values of the analytic function in the unit disk (Blaschke 1915).

$$B(z, (a_n)) = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} \left(1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a_n} z}\right),$$

Where $\lambda + 1$ is natural number, $0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|) < +\infty$$

In case, when $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)=+\infty$ , there are different generalizations of Blaschke Product (Picard 1926, Джербашян 1945, 1948, Тетвадзе 1980, Tsuji 1955).

Canonical product of Blaschke - Djerbashyan (Джербашян, 1945)

$$\mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n))=z^{\lambda}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)^k\right)$$

is particular case of Djerbashyan product (Джербашян, 1948), where $\lambda+1$ and $p$ natural numbers $|z|<1$,

$$0<|a_n|\le |a_{n+1}|<1, \lim_{n\to\infty}|a_n|=1,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^P=+\infty, \sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^{P+1}<+\infty$$

Infinite product $\mathcal{B}_P(z,(a_n))$ is unifomly and absolutely convergent inside of the open unit disk, and represents analytic function with zeros

$$\underbrace{0,0,\dots 0}_{\lambda}, a_1, a_2, \dots a_n \dots .$$

Frostman proved for the Bliashke product (Frostamn, 1942) the following important

**Theorem 1**. In order for the Bliashke product $B(z,(a_n))$ and all its subsets to have a radial limit with modulus of 1 in $e^{i\theta}$ point, it is necessary and sufficient that

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-|a_n|}{|e^{i\theta}-a_n|}<+\infty$$

Let us denote $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}$, and the set of its accumulation points by $A'$. Colwell (Colwell, 1966) proved it.

**Theorem 2.** In order for a Blaschke product $B(z,(a_n))$to exist, such that it possesses a radial boundary of modulus one at every point on the unit circle, necessary and sufficient conditions are that the set $E=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}'$ is closed and dense nowhere on the unit circle $\{z:|z|=1, z\in C\}$. This condition is proved in the article (Tetvadze, Tetvadze, & Tsibadze, 2021).

**Theorem 3.** If $0<|a_n|<|a_{n+1}|<1, \lim_{n\to\infty}|a_n|<1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-a_n)^p=+\infty, \sum_{n=1}^{+\infty}(1-a_n)^{p+1}=+\infty,$$

and

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|e^{i\theta}-a_n|}\right)^{p+1}<+\infty.$$

Then the following equality holds:

$$\lim_{\substack{\wedge\\ z\to e^{i\theta}}} B_{p+1}(z,(a_n))=B_{p+1}\left(e^{i\theta},(a_n)\right)\neq 0,\infty.$$

Similar issues for the Bliashke-Jerbashian canonical product are discussed in the article below.

**Theorem 4.** Suppose$E \subset \{z: |z| = 1, z \in C\}$. In order Blaschke-Djerbashyan canonical product $B_{p+1}(z,(a_n))$ to exist, for which there is an angular limit at any point $e^{i\theta}$ $(0 \le 0 < 2\pi)$ and the condition is fulfilled

$$\lim_{\substack{\wedge \\ z\to e^{i\theta}}} B_{p+1}(z,(a_n)) = B_{p+1}\left(e^{i\theta},(a_n)\right) \neq 0, \infty$$

necessary and sufficient conditions are that the set $E$ is closed and dense nowhere on the unit circle $\{z: |z| = 1, z \in C\}$.

**Proof**: Sufficiency. Suppose $E$ is a closed and nowhere dense set, by Theorem 3 a sequence exists $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} 1 - |a_n| < +\infty$ such that

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - |a_n|}{|e^{i\theta} - a_n|} < +\infty$$

set of accumulation points is $E$ and the corresponding Blaschke product has a radian limit with modulus one at every point of the unit circle.

Denote $b_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right) e^{\varepsilon_n}$ where

$$\sin\frac{\varepsilon_n}{2} = \frac{1}{(p+1)^2\sqrt{n}}. \tag{1}$$

Obviously $\lim_{n\to\infty} b_n = 1, 1 - |b_n| = \frac{1}{\sqrt[p]{n}}$ (2)

And

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1 - |b_n|)^p = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(1 - |b_n|)^{p+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[p]{n^{p+1}}} = +\infty,$$

$$(1 - |b_n|) = \left|1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)\cos\varepsilon_n - i\left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)\sin\varepsilon_n\right| =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)\cos\varepsilon_n\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)^2 sin^2\varepsilon_n} =$$

$$= \sqrt{1 - 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)\cos\varepsilon_n + \left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)\right)^2 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right) - 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)\cos\varepsilon_n}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\sqrt[p]{n}} + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)(1 + \cos\varepsilon_n)} > \sqrt{4\left(1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)sin^2 \varepsilon_n/2}$$

$$> 2\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[p]{2}}}\sin \varepsilon_n/2$$

i.e. when $n \ge 2$

$$(1-|b_n|) > 2\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[p]{2}}\sin{}^{\varepsilon_n}/_2},$$

Hence, if we denote $2\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[p]{2}}} = q > 0$, then according to (1) and (2):

$$|1-b_n| > \frac{q}{\sqrt[(p+1)^2]{n}}$$

Considering the latest inequality and (2)

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1-|b_n|}{|1-b_n|}\right)^{p+1} < \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[p]{n^{p+1}}}\cdot \sqrt[p+1]{n}}{q^{p+1}} = \frac{1}{q^{p+1}}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sqrt[p+1]{n}}{\sqrt[p]{n^{p+1}}} = \frac{1}{q^{p+1}}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{p+1}{p}+\frac{1}{p+1}}} =$$

$$= \frac{1}{q^{p+1}}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{p^2+p+1}{p(p+1)}}} = \frac{1}{q^{p+1}}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p(p+1)}}} < +\infty$$

i.e.

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1-|b_n|}{|1-b_n|}\right)^{p+1} < +\infty\,. \tag{3}$$

If $e^{i\theta_0} \in E$ then according to (2)

$$\lim_{n\to\infty} b_n e^{i\theta_0} = e^{i\theta_0} \tag{4}$$

Combining $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ and $\left(b_n e^{i\theta_0}\right)_{n=1}^{+\infty}$ sequences and enumerating them in a manner that preserves increasing modules, will yield new sequence $(c_n)_{n=1}^{+\infty}$, for which the set of points accumulation is $E$, and moreover, according to (3) and (4)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|c_n|}{|e^{i\theta_0}-c_n|}\right)^{p+1} < +\infty, (0 \le 0 < 2\pi)\,.$$

Hence, according to theorem 3

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta}\\ \wedge}} B_{p+1}\big(z,(c_n)\big) = B_{p+1}\left(e^{i\theta},(c_n)\right) \ne 0, \infty, \forall\theta(0 \le \theta < 2\pi)$$

Necessity: Suppose $B_{p+1}\big(z,(a_n)\big)$ is the Blaschke-Djerbashyan canonical product for which the conditions of the theorem are satisfied and the set of accumulation points of the sequence $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ is $E$. As established, the set of accumulation points is always closed, i.e. $E$ set is closed. Let us denote by $C\big(B_{p+1}, e^{i\theta}\,\big)$ the limit set of the $B_{p+1}\big(z,(a_n)\big)$ function at $e^{i\theta}$ point Seidel W....1934). Obviously,

$$0 \in C\big(B_{p+1,}e^{i\theta}\big) \text{ and } 0 \notin C_r\big(B_{p+1,}e^{i\theta}\big), \text{when } e^{i\theta} \in E,$$

where $C_r\big(B_{p+1,}e^{i\theta}\big)$ is the limit set of $B_{p+1,}\big(z,(a_n)\big)$ along with the radius, i.e.

$$C\big(B_{p+1,}e^{i\theta}\big) \ne C_r\big(B_{p+1,}e^{i\theta}\big).$$

Therefore, according to Collingwood (Collingwood 1958) theorem, the set $E$ is a set of the first category, i.e. the representation E is a union of finite or countable sets of nowhere dense sets and also $E$ is a closed set, so it will be a nowhere dense set (Colwell 1966).

The theorem is proved.