მასალათა მექანიკა

მზარდი ბლანტდრეკადი სხეულების მექანიკის განტოლებები

მიხეილ ნიქაბაძე
ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ნოდარ მარდალეიშვილი
nodar.mardaleishvili@atsu.edu.ge
ომარ კიკვიძე
omar.kikvidze@atsu.edu.ge
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო
https://doi.org/10.52340/atsu.2024.23.01.18

სტატიაში მოცემულია მზარდი ბლანტდრეკადი თამთა სხეულებისათვის სასაზღვრო ამოცანების დასმა. ჩაწერილია განმსაზღვრელი განტოლებები არამზარდი(ძირითადი) სხეულებისათვის. ჩაწერილია წონასწორობის განტოლებები მზარდი სხეულებისათვის და ფორმულირებულია სასაზღვრო პირობები მცირე დეფორმაციის შემთხვევაში ძირითადი და დამატებითი სხეულების გამყოფი ზედაპირის საზღვარზე.

საკვანძო სიტყვები: *ძაბვების ცვლილების სიჩქარეების ტენზორი, დეფორმაციების სიჩქარეების ტენზორი, დრეკადბლანტი სხეული, მზარდი სხეული.*

მზარდ სხეულად მიიჩნევა სხეული, რომლის მოცულობა და კონფიგურაცია იცვლება დატვირთვის პროცესში (დახვევის ტექნოლოგიური პროცესები, ჩამოსხმა წნევით, დანაფარების დადება ელექტროსტატიკური მეთოდით და სხვა). ზრდა შეიძლება გამოწვეული იყოს, მაგალითად, სხვა სხეულების დისკრეტული ან უწყვეტი მიერთებით, სხეულის კონფიგურაციის ცვლილებით, საზღვრის ცვლლილება შეიძლება იყოს დაკავშირებული, ასევე, მასალის ნაწილობრივ ჩამოცილებასთან სხეულის დეფორმირებისას. ზრდის პროცესში იცვლება სხეულის არა მარტო მოცულობა და კონფიგურაცია, არამედ მასალის დრეკადი და რეოლოგიური თვისებები, როგორც დროში, ასევე კოორდინატების მიხედვით. ბლანტდრეკადი მასალების ფიზიკა-მექანიკური თვისებების ცვლილება დროში (დაბერების პროცესი) ხდება მათში მიმდინარე ფიზიკა-ქიმიური გარდაქმნების შედეგად, რომელთა ინტენსივობა დამოკიდებულია სხვადასხვა ფაქტორების მოქმედებაზე, როგორიცაა დასხივება, ტემპერატურული ველი, დრო, ტენიანობა, წნევა,

ზრდის სიჩქარე და სხვ. ჩვეულებრივ იგულისხმება, რომ დაბერება მიმდინარეობს დეფორმირების პროცესისაგან დამოუკიდებლად. მზარდი ბლანტდრეკადი სხეულის თვისებებს ავლენს ბიოლოგიური ქსოვილი ჩვეულებრივ პირობებში. ბევრი რეალური ხელოვნური და ბუნებრივი მასალები (ბეტონი, პოლიმერები, ყინვა, გრუნტი, ხე) ავლენენ მკვეთრად გამოხატულ ცოცვადობის და დაბერების თვისებებს ჩვეულებრივ ტემპერატურაზე. ცხადია, ამ მასალების დეფორმირების კანონზომიერების დროის ფაქტორზე მნიშვნელოვანი დამოკიდებულება, არსებითად ართულებს ზრდის პროცესის მოდელირებას.

ნახვევი კონსტრუქციების და მასიური ნაგებობების აგების და დამზადების ტექნოლოგია უშუალოდ დაკავშირებულია საწყის სხეულზე, სხვადასხვა ასაკის და მასალის ელემენტების დისკრეტულ ან უწყვეტ მიერთებასთან. ეს სხეულები ხასიათდებიან იმით, რომ მათი ელემენტების ასაკი და თვისებები დამოკიდებულია სივრცით კოორდინატებზე, ხოლო კონფიგურაცია მუდმივად იცვლება დატვირთვის პროცესში. არაერთგვაროვანი თვისებები დროში და სივრცეში არსებითად ცვლის სხეულის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის სურათს და აუცილებელი ხდება ცოცვადობის თეორიის კანონების გათვალისწინება. არაერთგვაროვანი დაბერებადი სხეულების ცოცვადობის, მზარდი დრეკადბლანტი სხეულების მექანიკის საკითხები განხილულია, ა. მანჟიროვის, ნ.არუტუნიანის და მათი მოსწავლეების ნაშრომებში (Арутюнян ... 1983, Арутюнян ... 1984, Манжиров ... 2006).

განვიხილოთ მზარდი, დრეკადბლანტი სხეულის დეფორმაცია, რომელსაც დატვირთვამდე, სხვა ელემენტების (მასის) მიერთებამდე უკავია ევკლიდეს სამგანზომილებიანი Ω_0 არე უბან-უბან გლუვი საზღვრით $\delta\Omega_0$. Ω_0 არეს ეწოდება ძირითადი.

q^k $(k=1,2,3)$ აღნიშნავს არის წერტილების მატერიალურ კოორდინატებს რომელიმე არჩეული კოორდინატთა სისტემის მიმართ. მატერიალური წერტილის რადიუს-ვექტორი $\vec{R}$ წარმოადგენს q^k მატერიალური კოორდინატების და t დროის ფუნქციას და

$$\vec{R}(q^k,t)=r^i(q^k,t)\vec{e}_i=\vec{R}(q^k,0)+\vec{U}(q^k,t),$$

სადაც $\vec{U}(q^k,t)$ გადაადგილების ვექტორია.

დროის გარკვეულ მომენტში (მაგ. t=0) იწყება ზრდის პროცესი და გრძელდება t მომენტამდე. ზრდის პროცესში სხეულს მიუერთდება დამატებითი ელემენტები და დაიკავებს Ω (t) არეს უბან-უბან გლუვი ზედაპირით δΩ. ზრდის პროცესში, სხეულის ზედაპირზე მყარი მდგომარეობის წარმოქმნისას, დატვირთვების მოქმედებით (მაგ. მოცულობითი ძალები, ელემენტის წინასწარი დაჭიმვის ძალები და სხვ.)

აღიძვრებიან შიდა ძალოვანი ფაქტორები და გადაადგილების ვექტორის და დეფორმაციის ტენზორის განსაზღვრა შეუძლებელია, თუ

$$\overset{\sim}{DP}(t)=\dot{P}^{ij}\vec{e}_i(t)\vec{e}_j(t)$$

საწყისი მდგომარეობა (გეომეტრია) უცნობია. მაგრამ, დეფორმაციათა სიჩქარის და ძაბვების ნაზრდის განსაზღვრა შესაძლებელია ჩვეულებრივ, ტექნოლოგიური ამოცანების ამოხსნის მეთოდების გამოყენებით. ამიტომ მზარდი, დრეკადბლანტი სხეულის მექანიკის განტოლებები მოსახერხებელია ჩაიწეროს ნაზრდებში (ან სიჩქარეებში).

ტოლობით განსაზღვრულ ტენზორს ვუწოდოთ ძაბვების ცვლილების სიჩქარის ტენზორი, ხოლო

$$D\underset{\sim}{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{ij}(t)\vec{e}^{i}(t)\vec{e}^{j}(t)$$

ტოლობით განსაზღვრულ ტენზორს ვუწოდოთ მოკლედ დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორი.

ჩავთვალოთ, რომ ზრდის პროცესი იწყება მყარი დეფორმადი გარემოს (სხეულის) ზედაპირის რომლიმე ერთ მხარეს, ე.ი. ზრდა იწყება t=0 მომენტში დეფორმადი სხეულის საზღვარზე (ან მის ნაწილზე). შესაბამისად, ზრდის პროცესის დაწყების ზედაპირი წარმოადგენს საერთო საზღვარს ძირითადი და მზარდი სხეულებისათვის. ვთქვათ, სხეული ისეთია, რომ მისი შემდგომი ქცევა რაღაც დროის t მომენტიდან განისაზღვრება მისი მახასიათებლებით (პარამეტრებით), რომლებიც მოცემულია ამ მომენტისათვის. ეს პარამეტრები შეიძლება იყოს ძაბვის და დეფორმაციის ტენზორების კომპონენტები და რამდენიმე დამატებითი პარამეტრი $h_u, u = 0,1,\cdots,U$. ასეთი ტიპის მყარი გარემოსათვის განმსაზღვრელ თანაფარდობებს აქვს სახე (Тринчер ...2001):

$$\dot{P}^{ij}(t) = C^{ijkl}\big(H(t)\big)\dot{\varepsilon}_{kl}(t) + C^{ij}\big(H(t)\big),$$
$$\dot{h}_u(t) = C_u^{ij}\big(H(t)\big)\dot{\varepsilon}_{ij}(t) + C_u\big(H(t)\big), u = 0,1,\cdots,U, \quad (1)$$

სადაც $H(t)$ აღნიშნავს მყარი გარემოს აქტუალურ მახასიათებლებს.

სხეულის საწყისი მდგომარეობის განმსაზღვრელი ფუნქციებიდან

$$\mathring{P}^{ij}(q^k), \mathring{\varepsilon}_{ij}(q^k), \mathring{h}_u(q^k), \mathring{\alpha}^i(q^k), \text{(i,j,k=1,2,3; u=0,1,}\cdots, U) \quad (2)$$

სადაც $\mathring{\alpha}^i$ სამი პარამეტრია, რომლებიც განსაზღვრვას $\mathring{e}_i$ ვექტორების მდებარეობას საწყის ორთონორმირებულ ბაზისში, დამოუკიდებელია 9+ U+3, რადგან ადგილი აქვს ტოლობას:

$$div(\mathring{P}^{ij}(p^k)\vec{e}_i(p^k)\vec{e}_j(p^k)) = 0$$

განტოლებათა სისტემა, რომელიც შედგება (1) განმსაზღვრელი თანაფარდობებისაგან, წონასწორობის განტოლებებისა

$$P^{ij},j\vec{e}_j + P^{ij}\vec{e}_{j,j} + P^{ij}\vec{e}_j V_{,i}/V + \rho\vec{F} = 0$$

და კოშის თანაფარდობებისაგან

$$2\varepsilon_{ij}\left(q^k,t\right)= g_{ij}\left(\overset{0}{q}{}^k,t\right)-g_{ij}\left(q^k\right)= g_{ij}\left(q^k,t\right)-g_{ij}\left(\overset{0}{q}{}^k\right)+\overset{0}{\varepsilon}_{ij}\left(\overset{0}{q}{}^k,t\right) \tag{4}$$

სადაც $V = \sqrt{g}$, $g = \det(g_{ij})$, $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, ქმნის სრულ განტოლებათა სისტემას სხეულის მახასიათებლების მიმართ. თუ ამ განტოლებებს დავუმატებთ საწყისი მდგომარეობის განმსაზღვრელ პირობას ჩაწერილს ფორმით

$$\vec{U}\left(q^i,0\right) = 0 \tag{5}$$

და სტანდარტულ პირობას ძირითადი სხეულის არამზარდ საზღვარზე : $f_0\left(q^i,t\right) = 0$,

მივიღებთ პირველ სასაზღვრო ამოცანას ძირითადი სხეულისათვის.

ახლა დავსვათ საწყის-სასაზღვრო ამოცანა მზარდი სხეულისათვის მცირე დეფორმაციის შემთხვევაში. ვიგულისხმოთ, რომ ზრდადი სხეულის ფორმირების პროცესის დაწყებისას მისი ზედაპირი წარმოადგენს საზღვარს ძირითად და მზარდ სხეულებს შორის. დავუშვათ, რომ მზარდი სხეულის თითოეული წერტილი მიუერთდება სხეულს ზრდის პროცესის რაღაც $t^* \in [0;t]$ დროის მომენტში. $\{p^i\}$ $(i = 1,2,3)$ სივრცულ კოორდინატთა სისტემაში მზარდი სხეულის q^i $(i = 1,2,3)$ მატერიალურ კოორდინატებად მივიღოთ სხეულთან წერტილის მიერთების t^* მომენტი და ამ წერტილის კოორდინატები p^1 და p^2 მიერთების მომენტში (Тринчер ...2001), ე.ი.

$$q^1 = t^*, q^s = p^s,\ t = t^*\ \ (s = 2,3) \tag{6}$$

მცირე დეფორმაციის შემთხვევაში ზრდადი საზღვრების ცნობილი სიმრავლე $\{p^i\}$ სივრცულ კოორდინატთა სისტემაში მოიცემა თანაფარდობით:

$$p^1 = f_1(t,p^2,p^3). \tag{7}$$

ასეთი სახის კოორდინატთა სისტემიდან შეგვიძლია გადავიდეთ ისეთ ორთოგონალურ კოორდინატთა სისტემაზე (რომელიც არსებობს მხოლოდ მცირე დეფორმაციის შემთხვევაში), რომელთათვისაც საზღვრის ზედაპირების სიმრავლე შედის ერთ-ერთ კოორდინატთა ზედაპირების სიმრავლეში. ასეთ კოორდინატთა სისტემაში მზარდი საზღვრის განტოლებას $\{p^i\}$ $(i = 1,2,3)$ სივრცულ კოორდინატთა სისტემაში აქვს სახე:

$$p^1 = f_1(t) \qquad \text{ან} \quad t = f_1^{-1}(p^1) \equiv t^*(p^1). \tag{8}$$

მცირე დეფორმაციის შემთხვევაში მოსახერხებელია $q^1 = t^*$ მატერიალური კოორდინატიდან გადავიდეთ კოორდინატზე $q^1 = f_1(t^*)$.

q^i მატერიალურ კოორდინატები ავღნიშნოთ p^i-თი. ამ აღნიშვნით ხაზს ვუსვამთ იმას, რომ q^i მატერიალურ წერტილებში p^i კოორდინატები საკმარისად ახლოსაა q^i მატერიალურ კოორდინატებთან:

$$r^i(q^i, t) \approx X_p^i(q^j).$$

ასევე მოსახერხებელია t დროდან გადავიდეთ დაყვანილ დროზე ფორმულით: $p = f_1(t)$.

$(p^i, i = 1,2,3)$ ორთოგონალურ კოორდინატთა სისტემის ლოკალური ბაზისიდან

$$\vec{e}_i(q^j, t) \approx \vec{e}_i^{(p)}(p^j), i, j = 1,2,3$$

გადავიდეთ ორთონირმირებულ ბაზისზე

$$\vec{m}_i(p^j) = \frac{\vec{e}_i^{(p)}(p^j)}{\left|\vec{e}_i^{(p)}(p^j)\right|}. \tag{9}$$

შევნიშნოთ, რომ მზარდი საზღვრების ერთობლიობა უნდა ჩვათვალოთ ცნობილად, რადგან ზრდის ტექნოლოგიიდან გამომდინარე ცნობილია (განსაზღვრებადია) ზრდის h_* სიჩქარე, რომელიც განსაზღვრავს უსასრულოდ მცირე ფენის dh სისქეს, რომლის მიერთება ხდება $[t; t + dt]$ დროის განმავლობაში, შემდეგი თანაფარდობით:

$$dh(t, q^2, q^3) = h_*(t, q^2, q^3)dt.$$

ზრდის h_* სიჩქარე დაყვანილი დროის გამოყენებით განისაზღვრება ფორმულით:

$$h_*(p^i) = e_1(p^i) \tag{10}$$

(10) თანაფარდობის გამოყენებით შესაძლებელია აიგოს ბუნებრივ კოორდინატთა სისტემა.

აქტუალური კოორდინატთა სისტემის ლოკალურ (ნორმირებულ) ბაზისს (9) ზრდის საზღვარზე ეწოდება მოცემადი ბაზისი $\{\vec{m}_i^*(p^j) \equiv \vec{m}_i(p^j, p^1)\}$, რომელიც მცირე დეფორმაციის შემთხვევაში ითვლება ცნობილად (სასზღვრო ამოცანის ამოხსნამდე).

მზარდი სხეულების თეორიის ძირითადი დებულება მდგომარეობს იმაში, რომ ზრდადი სხეულების მატერიალური წერტილების დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა მიერთების მომენტში ცნობილია, ამასთან, მცირე დეფორმაციის შემთხვევაში ტენზორული მახასიათებლები მოიცემა $\{\vec{m}_i^*(p^j)\}$ ბაზისში.

ამგვარად, მზარდ საზღვარზე $p^1 = p$ და სასზღვრო ამოცანის ამოხსნამდე ცნობილია მდგომარეობის განმსაზღვრელი ფუნქციები (პარამეტრები):

$P_{ij}(p, p^s), \varepsilon_{ij}(p, p^s), h_u(p, p^s), \alpha_i(p, p^s)$ $(i, j = 1,2,3; s = 2,3; u = 0,1, \cdots, U)$
(11)

(11) შეიცავს 12+U+3 რაოდენობის ფუნქციას, მათ შორის დამოკიდებული ფუნქციები იმ შემთხვევაში აღმოჩნდება, თუ სხეულის განმსაზღვრელი თანაფარდობებიდან იქნება ინტეგრებადი თანაფარდობები.

მზარდი სხეულებისათვის სასაზღვრო ამოცანა შეიცავს:

განტოლებათა სრულ სისტემას:

$$\dot{P}_{ij}(p,p^k)=C_{ijkl}\left(H(p,p^k)\right)\dot{\varepsilon}_{kl}(p,p^k)+\dot{t}^*(p)C_{ij}\left(H(p,p^k)\right),$$

$$\dot{h}_u(p,p^k)=C_u^{ij}\left(H(p,p^k)\right)\dot{\varepsilon}_{ij}(p,p^k)+C_u\left(H(p,p^k)\right), \quad (12)$$

$$(P_{ij,i}(p,p^k)\vec{m}_j(p^k)+P_{ij}(p,p^k)\vec{m}_{j,i}(p^k)+P_{ij}(p,p^k)\vec{m}_i(p^k)V_{,i}/V-$$
$$-e_{i,i}(p^k))/\left|\vec{e}_i(p^k)\right|=\vec{f}(p,p^k), \quad (13)$$

$$2\varepsilon_{ij}(p,p^k)=\vec{R}_{,i}(p,p^k)\cdot\vec{R}_{,j}(p,p^k)/\left(\left|\vec{e}_i(p^k)\right|\left|\vec{e}_j(p^k)\right|\right)+2\varepsilon_{ij}^0(p^k)-2g_{ij}^0(p^k),\ k=2{,}3. \ (14)$$

სასაზღვრო პირობებს:

ა) ძირითად საზღვარზე $p^1=p_0^1$:

$$u^1(p_0^1,p,p^2,p^3)=u_0^1(p,p^2,p^3), \quad (14)$$

ბ) ზრდად საზღვარზე $p^1=p$:

$$P_{ij}(p_0^1,p,p^2,p^3)=P_{ij}^0(p,p^2,p^3),\cdots,h_u(p_0^1,p,p^2,p^3)=h_u^*(p,p^2,p^3). \quad (15)$$

რადგან პარამეტრები დროზე არ არიან დამოკიდებული, მათთვის გვაქვს თანაფარდობები:

$$\alpha_i(p_0^1,p,p^2,p^3)=\alpha_i^*(p,p^2,p^3). \quad (16)$$

(12) – (16) თანაფარდობები წარმოადგენენ მზარდი სხეულებისათვის ძირითად სასაზღვრო ამოცანას მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში.

აღნიშნული თეორია შეიძლება განზოგადდეს უფრო მეტად დაზუსტებული ტენზორული აღრიცხვის გამოყენებით (Nikabadze ... 2017) სხვადსხვა რეოლოგიის მასალებზე (იხ. ნაშრომები Никабадзе 2023: Nikabadze, Ulukhanian, Mardaleishvili 2019)

სტატია იბეჭდება შოთა რუსთაველის საქართველოს ეროვნული სამეცნიერო ფონდის გრანტის ფარგლებში (FR-21-3926)

ლიტერატურა

Nikabadze, M. U. 2017. *Topics on Tenzor Calculus with Applications to Mechanics.* J. Math. Sci.

Nikabadze, M.U., Ulukhanian, A., Mardaleishvili, N.,2019. "Some Issues of Viscoelastic Thin Body Theories" *XII Annual International Meeting of the Georgian Mechanikal Union*, Book of Abstract, Kutaisi, Akaki Tsereteli State University, 2019: 79-80.

Арутюнян, Н.Х., Колмановский В.Б. 1983. *Теория ползучести неоднородных тел.* М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы.

Арутюнян, Н.Х., Дроздов, А.Д. 1984. „Механика растущих вязкоупругих тел, подверженных старению, при конечных деформациях". *Доклады АН СССР*, №4, 1984: 821-825.

Манжиров, А.В., Паршин, Д.А. 2006. „Нарашивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле". Изв. *РАН. МТТ.* №1, 2006: 66-83.

Тринчер, В. К., 2001. *Теория наращиваемых тел и родственные проблемы.* Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Москва.

Никабадзе, М. У., 2023. *Развитие метода ортогональных полиномов в мехвнике микрополярных и класических упругих тонких тел.* М. Мех.-мат. Ф-т МГУ им. М.В. Ломоносова.

Mechanics of Materials

Equations of mechanics of growing viscoelastic solids

Mikheil Nikabadze
M. Lomonosov Moscow State University
Nodar Mardaleishvili
nodar.mardaleishvili@atsu.edu.ge
Omar Kikvidze
omar.kikvidze@atsu.edu.ge
Akaki Tsereteli State University
Kutaisi, Georgia
https://doi.org/10.52340/atsu.2024.23.01.18

The article presents boundary value problems for growing viscoelastic solids. Determining equations for non-growing (basic) solids are written. Equilibrium equations for growing solids are written, and boundary conditions are stated at small deformations on the boundary of the dividing surface of the main and additional bodies.

Keywords: *the tensor of the rate of change of stresses; the strain rate tensor; viscoelastic solid; growing solid.*

A growing solid is considered to be a body whose volume and configuration change during the loading process (technological processes of twisting, pressure molding, laying of covers by electrostatic method, etc.). Growth could be caused, for example, by the discrete or continual joining of other bodies, or changes in body configuration. Boundary changes may also be related to the partial removal of material during the deformation of the body. In the process of growth, not only the volume and configuration of the body change, but also the elastic and rheological properties of the material, both in time and by coordinates. Changes in the physico-mechanical properties of viscoelastic materials over time (the aging process) occur as a result of physico-chemical transformations taking place therein, the intensity of which depends on the action of various factors, such as radiation, temperature field, time, humidity, pressure, growth rate, etc. It is usually assumed that aging occurs independently of the deformation process. The properties of an increasingly viscoelastic body are exhibited by biological tissue under normal conditions. Many real artificial and natural materials (concrete, polymers, ice, soil, and wood) exhibit pronounced creep and aging properties at normal temperatures. Obviously, the significant dependence of the regularities of deformation of these materials on the time factor essentially complicates the

The construction and manufacturing technology of filament-wind and massive structures is directly related to the discrete or continuous connection of elements of different ages and materials to the initial body. These bodies are characterized by the fact that the age and properties of their elements depend on spatial coordinates, and the configuration is constantly changing during the loading process. Non-uniform properties in time and space essentially change the picture of the stress-strain state of a body, and it becomes necessary to consider the laws of creep theory. Issues of creep of non-uniform aging bodies, and mechanics of growing elastic-viscous solids are discussed, in the works of A. Manzhirov, N. Arutunyan and their students (Arutunyan ... 1983, Arutunyan ... 1984, Manzhirov ... 2006).

Consider the deformation of a growing, elastic solid, which, before loading, before the addition of other elements (mass), occupies a three-dimensional Euclidean area Ω0 with a region-by-region smooth boundary δΩ0. The area Ω0 is called the core.

q^k $(k = 1,2,3)$ denotes the material coordinates of the points for any chosen coordinate system. The radius vector $\vec{R}$ of the material point is a function of material coordinates $q^k$and time t, and

$$\vec{R}(q^k, t) = r^i(q^k, t)\vec{e}_i = \vec{R}(q^k, 0) + \vec{U}(q^k, t),$$

where $\vec{U}(q^k, t)$ is the displacement vector.

At some point in time (e.g. t=0) the growth process begins and continues until time *t*. In the process of growth, additional elements will join the body and occupy the area Ω (t) with a smooth surface δΩ. In the process of growth, during the formation of a solid state on the surface of a body, internal force factors are induced by the action of loads (e.g. volume forces, pre-tensioning forces of the element, etc.), and the displacement vector and deformation tensor cannot be determined if the initial state (geometry) is unknown. However, it is possible to determine the rate of deformations and the increase in stresses using the usual methods of solving technological problems. Therefore, it is convenient to write the equations of the mechanics of a growing, elastic solid in increments (or velocities).

Let us call the tensor defined by the equation

$$D\underset{\sim}{P}(t) = \dot{P}^{ij}\vec{e}_i(t)\vec{e}_j(t)$$

the tensor of the rate of change of stresses, while the tensor defined by the equation

$$D\underset{\sim}{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{ij}(t)\vec{e}^i(t)\vec{e}^j(t)$$

we shall call the strain rate tensor for short.

Assume that the growth process begins on one side of a solid deformable medium (body) surface, that is, the growth starts at the moment t=0 at the boundary (or part of it) of the deformable body. Accordingly, the surface at the beginning of the growth process is a common boundary for the main and growing solids. We shall say that the body is such that its further behavior at some point in time *t* is determined by its characteristics (parameters), which are given for that moment. These parameters can be the components of the stress and strain tensors and some additional parameters $h_u, u = 0,1,\cdots,U$. The defining ratios for this type of solid environment are as follows (Trincher V. K...2001):

$$\dot{P}^{ij}(t) = C^{ijkl}\big(H(t)\big)\dot{\varepsilon}_{kl}(t) + C^{ij}\big(H(t)\big),$$
$$(t) = C_u^{ij}\big(H(t)\big)\dot{\varepsilon}_{ij}(t) + C_u\big(H(t)\big), u = 0,1,\cdots,U, \qquad (1)$$

where $H(t)$ denotes the actual characteristics of a solid medium.

Of the functions defining the initial state of the body

$$\overset{\circ}{P}{}^{ij}(q^k), \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}(q^k), \overset{\circ}{h}_u(q^k), \overset{\circ}{\alpha}{}^i(q^k), \text{(i,j,k=1,2,3; u=0,1,}\cdots, U) \qquad (2)$$

where α^i are three parameters that determine the location of the vectors in the initial orthonormal basis e_i, 9+ U+3 are independent, because the result is equation:

$$div\ P^{ij}\overset{\circ}{(}p^k)\vec{e}_i(p^k)\vec{e}_j(p^k) = 0$$

A system of equations consisting of defining ratios (1), of equilibrium equation

$$P^{ij},j\vec{e}_j + P^{ij}\vec{e}_{j,j} + P^{ij}\vec{e}_j V_{,i}/V + \rho\vec{F} = 0 \qquad (3)$$

and Cauchy ratios

$$2\varepsilon_{ij}\left(q^k,t\right) = g_{ij}\left(\overset{0}{q}{}^k,t\right) - g_{ij}\left(q^k\right) = g_{ij}\left(q^k,t\right) - g_{ij}\left(\overset{0}{q}{}^k\right) + \overset{0}{\varepsilon}_{ij}\left(\overset{0}{q}{}^k,t\right) \qquad (4)$$

where $V = \sqrt{g}$, $g = \det(g_{ij})$, $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ creates a complete system of equations for the properties of the body. If we add to these equations the condition determining the initial condition in written form

$$\vec{U}(q^i, 0) = 0 \qquad (5)$$

and the standard condition on the non-growing boundary of the main solid: $f_0(q^i,t) = 0$, we obtain the first boundary value problem for the main solid.

Now let us set the initial boundary value problem for growing solids at small deformations. We mean that at the beginning of the process of the formation of a growing solid, its surface represents the boundary between the main and growing solids. Suppose that each point of the growing solid joins the body at some point in time $t^* \in [0; t]$ of the growth process. {p^i } (i=1,2,3) In the spatial coordinate system $\{p^i\}$ $(i = 1,2,3)$, let the moment t^* of joining points to the body and the coordinates p^1 and p^2 at the moment of joining this point, be the material coordinates (Trincher V. K...2001), that is,

$$q^1 = t^*, q^s = p^s, \ t = t^* \ (s = 2,3) \tag{6}$$

At small deformation, the known set $\{p^i\}$ of growing boundaries in the spatial coordinate system is given as follows:

$$p^1 = f_1(t, p^2, p^3). \tag{7}$$

From this kind of coordinate system, we can go to such an orthogonal coordinate system (which exists only at small deformation), for which the set of boundary surfaces is included in the set of one of the coordinate surfaces. In such a coordinate system, the growing boundary equation $\{p^i\}$ $(i = 1,2,3)$ in the spatial coordinate system is as follows:

$$p^1 = f_1(t) \ \text{ or } \ t = f_1^{-1}(p^1) \equiv t^*(p^1). \tag{8}$$

At small deformations, it is convenient to move from the material coordinate $q^1 = t^*$ to the coordinate $q^1 = f_1(t^*)$.

Let us denote by p^i the material coordinates q^i. With this notation, we emphasize that the coordinates p^i at material points q^i are close enough to the material coordinates q^i:

$$r^i(q^i, t) \approx X_p^i(q^j).$$

It is convenient to move from the time t to the reduced time by the formula: $p = f_1(t)$. Let us move from the local basis of the orthogonal coordinate system $(p^i, i = 1,2,3)$

$$\vec{e}_i(q^j, t) \approx \vec{e}_i^{(p)}(p^j), i, j = 1,2,3$$

to an orthonormal basis

$$\vec{m}_i(p^j) = \frac{\vec{e}_i^{(p)}(p^j)}{\left|\vec{e}_i^{(p)}(p^j)\right|}. \tag{9}$$

Note that the set of growing boundaries should be considered known because, based on the growth technology, the growth rate h_* is known (determinable), which determines the thickness *dh* of the infinitely small layer, which is joined during the time $[t; t + dt]$, in the following equality:

$$dh(t, q^2, q^3) = h_*(t, q^2, q^3)dt.$$

The growth rate h_*, by using the reduced time, is determined by the formula:

$$h_*(p^i) = e_1(p^i) \tag{10}$$

Using the equation (10), it is possible to build the natural coordinate system.

The local basis of the current coordinate system (9) on the growth boundary is called a given basis $\{\vec{m}_i^*(p^j) \equiv \vec{m}_i(p^j, p^1)\}$, which is considered known at small deformation (before solving the boundary value problem).

The basic provision of the theory of growing bodies is that the stress-strain state of the material points of growing solids at the moment of joining is known, and at small deformation, the tensor characteristics are given in the basis $\{\vec{m}_i^*(p^j)\}$.

Thus, on the growing boundary $p^1 = p$ and before solving the boundary value problem, the state-defining functions (parameters) are known:

$$P_{ij}(p, p^s), \varepsilon_{ij}(p, p^s), h_u(p, p^s), \alpha_i(p, p^s) \; (i, j = 1,2,3; s = 2,3; u = 0,1, \cdots, U) \tag{11}$$

Equation (11) contains 12+U+3 quantity functions, among which the dependent functions will be found if there are integrable equations from the defining ratios of the body.

The boundary problem for growing solids includes:

The complete system of equations:

$$\dot{P}_{ij}(p, p^k) = C_{ijkl}\left(H(p, p^k)\right)\dot{\varepsilon}_{kl}(p, p^k) + \dot{t}^*(p)C_{ij}\left(H(p, p^k)\right),$$

$$\dot{h}_u(p, p^k) = C_u^{ij}\left(H(p, p^k)\right)\dot{\varepsilon}_{ij}(p, p^k) + C_u\left(H(p, p^k)\right), \tag{12}$$

$$(P_{ij,i}(p, p^k)\vec{m}_j(p^k) + P_{ij}(p, p^k)\vec{m}_{j,i}(p^k) + P_{ij}(p, p^k)\vec{m}_i(p^k)V_{,i}/V - -e_{i,i}(p^k))/|\vec{e}_i(p^k)| = \vec{f}(p, p^k), \tag{13}$$

$$2\varepsilon_{ij}(p, p^k) = \vec{R}_{,i}(p, p^k) \cdot \vec{R}_{,j}(p, p^k)/(|\vec{e}_i(p^k)||\vec{e}_j(p^k)|) + 2\varepsilon_{ij}^0(p^k) - 2g_{ij}^0(p^k), k = 2,3. \; (14)$$

Boundary conditions:

a) On the main boundary $p^1 = p_0^1$:

$$u^1(p_0^1, p, p^2, p^3) = u_0^1(p, p^2, p^3), \tag{14}$$

b) On the growing boundary $p^1 = p$:

$$P_{ij}(p_0^1, p, p^2, p^3) = P_{ij}^0(p, p^2, p^3), \cdots, h_u(p_0^1, p, p^2, p^3) = h_u^*(p, p^2, p^3). \tag{15}$$

Since parameters do not depend on time, we have the following equations for them:

$$\alpha_i(p_0^1, p, p^2, p^3) = \alpha_i^*(p, p^2, p^3). \tag{16}$$

Equations (12) – (16) represent the main boundary value problem for growing solids at small deformations.

The article is published within the framework of the grant of Shota Rustaveli National Science Foundation of Georgia (FR-21-3926).