განათლება
Education

რიცხვთა შედარების და შემთხვევათა ანალიზის გამოყენება ტექსტური ამოცანების ამოხსნისას დაწყებით კლასებში

გიორგი ბერძულიშვილი
giorgi.berdzulishvili@atsu.edu.ge
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
გიორგი ბრეგაძე
ანდრია რაზმაძის სახელობის ქუთაისის #41
ფიზიკა-მათემატიკური სკოლა
ირინე გოგიბერიძე
irine.gogiberidze@atsu.edu.ge
თამარ დოგრაშვილი
tamar.dograshvili@atsu.edu.ge
ირმა ჩხიკვაძე
irma.chkhikvadze@atsu.edu.ge
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო

საძიებო, არასტანდარტული, საოლიმპიადო მათემატიკური ამოცანების ამოხსნა შემოქმედებითი პროცესია და მეთოდურად რთულია. ამოცანის ამოხსნა მოითხოვს მისი ყველა კომპონენტის სრულფასოვან გათვალისწინებას. განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მივაქციოთ დაწყებით კლასებში რიცხითი შედარებების და შემთხვევბის ანალიზის გამოყენებას საძიებო, არასტანდარტული, საოლიმპიიდო ამოცანების ამოხსნისას. განსახილავი ამოცანების სირთულეს განსაზღვრავს მხოლოდ მასწავლებელი და დამოკიდებულია მოსწავლეთა მომზადების დონეზე, მათ გონებრივ და ფსიქო-ფიზიოლოგიურ მონაცემებზე, სკოლის და სწავლა/სწავლების პროფილზე. სტატიაში განხილული ამოცანები ნათელ წარმოდგენას აძლევს დაწყებითი კლასების მათემატიკის მასწავლებლებს, როგორი ფორმით უნდა წარმართოს სასწავლო პროცესი და რა სახის ამოცანების ჩართვაა მიზანშეწონილი დაწყებითი კლასების მათემატიკის სასწავლო პროცესში. ასეთი ამოცანების ამოხსნა მოსწავლეებისაგან საჭიროებს ადრე მიღებული ცოდნის აქტივიზაციას და მის საფუძველზე ახალი ცოდნის შექმნას, რაც მოსწავლეებისათვის საინტერესოს და მიმზიდველს ხდის სასწავლო პროცესს. მასწავლებელი სტატიის გულდასმით გაცნობის შემდეგ მარტივად მოახერხებს მსგავსი ამოცანების შედგენას, რომელსაც შემდგომში გამოიყენებს სასწავლო პროცესში. სტატიის ბოლოს გაკეთებულია სათანადო მეთოდური დასკვნები.

საკვანძო სიტყვები: *საძიებო ამოცანა, ტექსტური ამოცანა, რიცხვითი შედარება, შემთხვევბის ანალიზი, მეთოდოლოგია.*

მათემატიკის ეროვნული სასწავლო გეგმა ცალსახად განსაზღვრავს რომელ კლასში როგორი სახის ტექსტური ამოცანების შესწავლა უნდა მოხდეს. მაგრამ მასში დაკონკრეტებული არ არის როგორი შინაარსის ტექსტური ამოცანები უნდა განიხილონ სასწავლო პროცესში, რადგან მათემატიკის ეროვნული სასწავლო გეგმა მასწავლებელს აძლევს არჩევანის თავისუფლებას, მას თვითონ შეუძლია შეარჩიოს როგორი სახის ამოცანები (ალგორითმული, საძიებო, განმავითარებელი, საოლიმპიადო, საგანთაშორისი და სხვ.) შეარჩიოს და ჩართოს სასწავლო პროცესში. ასწავლოს მათი ამოხსნის ალგორითმული, კერძო თუ სპეციალური ხერხები. ამ არჩევანის შესაძლებლობას იძლევვა მე-12 მუხლი (მათემატიკის ეროვნული სასწავლო გეგმა, 2018-2024 წლები, 13): „სკოლა ვალდებულია, უზრუნველყოს სიღრმისეული სწავლება: სასწავლო მასალის ეტაპობრივად და მრავალმხრივად მიწოდება, ახალი საკითხების, ცნებების საფუძვლიანად და განსხვავებულ კონტექსტებში განხილვა“. მასზე დაყრდნობით სკოლაში შესაძლებელია მათემატიკის სასწავლო პროცესში ჩართული იქნეს სხვადასხვა სახის საძიებო, არასტანდარტული, საოლიმპიადო ამოცანები, რომელთაც მაღალი განმავითარებელი ეფექტი აქვს. მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებში ძირითადად განხილულია ალგორითმულად ამოხსნადი ტექსტური ამოცანები, რომლებსაც ნაკლები განმავითარებელი ეფექტი აქვს ვიდრე საძიებო, არასტანდარტულ და საოლიმპიადო ამოცანებს. დაწყებითი კლასების მათემატიკის მასწავლებლებისათვის ასეთი სახის ამოცანების მოძიება და მათი ამოხსნის მეთოდების/ხერხების მეთოდური დამუშავება ხელმისაწვდომი არ არის, რადგან ქართულ სინამდვილეში ამ საკითხების სწავლებას წარსულში არავინ იკვლევდა. საქართველოში აკრედიტირებული უმაღლესი სასწავლებლების მათემატიკის და დაწყებითი განათლების კურიკულუმების ანალიზი აჩვენებს, რომ საძიებო და საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის კერძო და სპეციალური მეთოდების სწავლება არ ხდება მათემატიკის მეთოდიკის სასწავლო კურსებში, რაც ასევე ერთ-ერთი ხელისშემშლელი ფაქტორია, სასწავლო პროცესში ჩავრთოთ ასეთი სახის ამოცანები. საძიებო, არასტანდარტულ და საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის მეთოდებზე/ხერხებზე და მათ ჩართვაზე დაწყებითი კლასების სასწავლო პრაქტიკაში ფუნდამენტური კვლევები ტარდება აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, მაგრამ კვლევის შედეგების გავრცელება მათემატიკის მასწავლებელთა ფართო წრისთვის მაინც პრობლემად რჩება.

საძიებო, არასტანდარტული, საოლიმპიადო ამოცანების სწავლების მე-

თოდურ დამუშავებას სკოლაში არაერთი კვლევა მიეძღვნა როგორც საზღვარგარეთ, ისე საქართველოში. პირველ რიგში, აუცილებელია მათემატიკის მასწავლებელთა სათანადო მომზადება, რომ მათ შეძლონ საძიებო, არასტანდარტული, საოლიმპიადო ამოცანების სრულყოფილი ამოხსნა და მათი სწავლება. ამის შესახებ გ. პოია (Polya 1981: 12) თვლის, რომ მათემატიკის მომავალი მასწავლებლები დაუფლებული უნდა იყვნენ მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის უნარებს. მას მიაჩნია, რომ არასტანდარტული მათემატიკური ამოცანების ამოხსნა ნამდვილი შემოქმედებითი სამუშაოა. უფრო მეტიც, ის ხაზგაზმით აღნიშნავს არასტანდარტული მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის სხვადასხვა, ერთმანეთისაგან განსხვავებული მეთოდების განხილვის აუცილებლობას, რისთვისაც ჩამოყალიბებებული აქვს ზოგადი წესები და არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნისას სავალდებულოდ მიაჩნია მათი თანმიმდევრობით გამოყენება: მასწავლებელმა მოსწავლეები უნდა გაარკვიოს ამოსახსნელი ამოცანის არსში, მოსწავლეებმა უნდა შეძლონ ამოცანის პირობის სრულყოფილი გაგება, მისი ყოველმხრივ გააზრება. გაიხსენონ ამოხსნილი ხომ არ აქვთ მსგავსი ამოცანა, თუ ამოხსნილი აქვთ გაიხსენონ როგორ ამოხსნეს, ამოსახსნელი ამოცანისათვის მოიფიქრონ მასზე უფრო ნაკლები სირთულის მქონე დამხმარე ამოცანა, რომლის საშუალებით შესაძლებელი იქნება ამოსახსნელი ამოცანის ნაწილის გადაჭრა, პირობების მხოლოდ ნაწილის შენარჩუნება, დანარჩენის გამოტოვება და ა.შ. დაახლოებით იგივე მიდგომაა გატარებული ნაშრომშიც (Safuanov 2014: 55–59).

ნაშრომში (Gazizov ... 2018) ავტორები თვლიან, რომ არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის სხვადასხვა მეთოდების შესწავლა ხელს უწყობს არასტანდარტული აზროვნების განვითარებას, რაც ეხმარება ადამიანებს შემოქმედებითი პრობლემების გადაჭრაში. მისი აზრით, ის ადამიანები, რომლებიც სტანდარტულად აზროვნებენ, ვერაფერს ახალს ვერ შექმნიან. მას მიაჩნია, რომ შემოქმედებითი დავალება არის შესანიშნავი გზა თითოეული ადამიანის პიროვნული შესაძლებლობების გამოსავლენად, ხოლო ამოცანების ამოხსნის ევრისტიკული მეთოდები საშუალებას იძლევა გააქტიურდეს ადამიანის შემოქმედებითი შესაძლებლობები, რაც ზრდის რეალურ ცხოვრებაში მათი დასაქმების შანსებს.

ზოგიერთ ავტორს აქვს მცდელობა განსაზღვროს საძიებო, არასტანდარ-ტული, საოლიმპიადო ამოცანების როლი დაწყებითი კლასების სასწავლო პრაქტიკაში (Khalmuratovna 2020). ადგენენ სავარჯიშოების სის-

ტემებს, რომლებიც ხელს უწყობენ დაწყებითი კლასების მოსწავლეთა აზროვნების სხვადასხვა სახის (ლოგიკური, შემოქმედებითი და სხვ.) განვითარებას, რისთვისაც გამოყენებულია საძიებო, არასტანდარტული, საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სხვადასხვა მიდგომა და მეთოდი/ხერხი (Sapazhanov ... 2021, Djurakulova 2019, Sailaubek & Imanbek 2020). საძიებო, არასტანდარტული, საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის და სწავლების საკითხები ფუნდამენტურად გამოკვლეულია ნაშრომში (Каплан ... 1981), რომელშიც, ავტორები გამოყოფენ სასწავლო სიტუაციების სამ სახეს, რომელიც უკავშირდება სკოლაში ამოცანების ამოხსნის სწავლების სხვადასხვა სტრატეგიებს: I-ისეთი სტანდარტული ამოცანების ამოხსნა, რომელთა ამოხსნის ზოგადი მეთოდები მოსწავლეებისათვის ცნობილი არ არის; II-ისეთი სტანდარტული ამოცანების ამოხსნა, რომელთა ამოხსნა მოსწავლეებისათვის უკვე ცნობილია; III-არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნა (Каплан ... 1981: 31). ავტორები არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის პროცესში გამოყოფენ ორ მნიშვნელოვან შემადგენელ ელემენტს: ამოცანის წარმოდგენას და ამოხსნის ძიებას. რის შემდეგაც ავტორები არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნისათვის იყენებენ ორ, ერთმანეთისაგან განსხვავებულ მიდგომას: პირველი ემყარება ამოცანის წარმოდგენას მდგომარეობათა სივრცეში, მეორე-ამოცანის დაყვანას (რედუქციას) ქვეამოცანებზე (Каплан ... 1981: 121).

ქართული მეთოდიკური აზრის ისტორიაში ამ საკითხების კვლევას დიდი ხნის ისტორია არ აქვს. პირველად პროფესორმა თამაზ მორალიშვილმა განახორციელა არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის ძიების სწავლების მეცნიერული კვლევა. თ.მორალიშვილი არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის პროცესში გამოყოფდა ორ არსებით შემადგენელ ელემენტს: ამოცანის წარმოდგენას, მის გადათარგმნას მათემატიკის ენაზე და ამოცანის ამოხსნის ძიებას, რომელიც დამოკიდებულია ამოცანის წარმოდგენის ხერხზე და მიმართულია მისი ამოხსნის შესაძლებლობის ან შეუძლებლობის დადგენაზე (მორალიშვილი 1991). ავტორი განიხილავს არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნისადმი ორ მიდგომას. პირველი მიდგომაა ამოცანის წარმოდგენა მდგომარეობათა სივრცეში, მეორე - ამოცანის რედუქცია ქვეამოცანებზე. ამოცანის წარმოდგენას მდგომარეობათა სივრცეში უკავშირებს ცნებებს: საწყისი, მიზნობრივი მდგომარეობა; მდგომარეობის აღწერა; ოპერატორი, გარდამქმნელი ერთი მდგომარეობისა მეორეში;

მდგომარეობათა სივრცე; ძიების (გადარჩევის) სივრცე. ცხადია, რომ, რაც უფრო რაციონალურია ძიების მეთოდი, მით უფრო ვიწროა მისი ძიების სივრცე. განიხილავს ძიების ორი სახეს: ყველა შესაძლო ვარიანტების ბრმა ძიებას (სიღრმეში გადარჩევა, სრული გადარჩევა); მიმართულ (მოწესრიგებულ) გადარჩევას. ძიების პროცესს მდგომარეობათა სივრცეში თ. მორალიშვილი თვალსაჩინოდ გრაფიკული მოდელით წარმოადგენს (მორალიშვილი ... 2008).

ჩვენი გუნდის მიერ საძიებო, არასტანდარტულ, საოლიმპიადო ამოცანების კვლევას მიეძღვნა არაერთი სამეცნიერო სტატია და მონოგრაფია, რომლებშიც დავამუშავეთ სწავლების სხვადასხვა საფეხურზე საძიებო, არასტანდარტული. საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის და სწავლების საკითხები, შევად-გინეთ 5000-ზე მეტი საძიებო, არასტანდარტული, საოლიმპიადო ამოცანათა სისტემები კლასების მიხედვით. ჩატარებული კვლევებით დადასტურდა საძიებო, არასტანდარტული, საოლიმპიადო ამოცანების ჩართვის აუცილებლობა სკოლის სასწავლო პროცესში მოსწავლეთა ასაკობრივი, გონებრივი, ფსიქო-ფიზიოლოგიური შესაძლებლობების და მათემატიკაში მათი მომზადების დონის შესაბამისად (ჩხიკვაძე და ბერძულიშვილი 2022, ბერძულიშვილი ... 2021, ბერძულიშვილი და ბრეგაძე 2021. ბერძულიშვილი ... 2019, ბერძულიშვილი და ბრეგაძე 2017, ბერძულიშვილი და ბრეგაძე 2016, ბერძულიშვილი 2016, ბერძულიშვილი და ბრეგაძე 2015. გარდა ამისა, ჩვენ მიერ დამუშავებულია ერთი და იმავე მეთოდებით სასკოლო და საოლიმპადო ამოცანების ამოხსნის მეთოდური ასპექტები და მათი ჩართვის მეთოდიკური ასპექტები საშუალო სკოლის სამივე საფეხურზე (ბერძულიშვილი 2018).

საოლიმპიადო, საძიებო, არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის მეთოდების/ხერხების კვლევა და მათი ჩართვა სკოლის სასწავლო პროცესში მეტად აქტუალურია არა მარტო ჩვენს ქვეყანაში, არამედ საზღვარგარეთაც. რაზეც მეტყველებს ქართველი და საზღვარგარეთელი ექსპერტების დასკვნები იმ საგრანტო პროექტებზე, რომლებშიც ავტორებმა გაიმარჯვეს როგორც საქართველოში, ისე საზღვარგარეთ. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 და სხვ]. საძიებო, არასტანდარტული, საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის მეთოდებს და მათ სწავლების კვლევას მიეძღვნა ბოლო ათწლეულში რამდენიმე სადოქტორო დისერტაცია მათემატიკის სწავლების მეთოდიკაში, რომელთა მომზადება და დაცვა მოხდა აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტე-

ტის განათლების მეცნიერებების სადოქტორო პროგრამის ფარგლებში.

სტატიაში განხილული გვაქვს დაწყებით კლასებში საძიებო. არასტანდარტული, საოლიმპიადო ტექსტური ამოცანების ამოხსნის მეთოდი, რომელიც უკავშირდება რიცხვით შედარებებს და შემთხვევების ანალიზს. ამ მეთოდს ფართო გამოყენება აქვს დაწყებითი კლასების სასწავლო პრაქტიკაში და არ ცილდება სასკოლო პროგრამას, ჩვენ ეს მეთოდი გამოყენებული გვაქვს ამოცანების არითმეტიკული მიდგომით ამოხსნისას, რაც ხშირად დაფუძნებულია ამოცანის პირობაში მოცემული რომელიმე კონკრეტული სიდიდის ყველა შესაძლო შემთხვევების განხილვასთან, ან ყველა შესაძლო შემთხვევებიდან იმ ქვეშემთხვევების გამოყოფასთან, როცა შესაძლებელია მოხდეს ან არ მოხდეს ამოცანის პირობაში აღწერილი მოვლენა ან პროცესი, მინიმალური ან მაქსიმალური მნიშვნელობების მოძებნისას და სხვ. უნდა შევნიშნოთ, რომ ზოგჯერ რიცხვითი შედარებების გამოყენება კარგ შედეგს იძლევა ისეთი ამოცანების ამოხსნის დროს, როცა ამოცანის ამოხსნა ეფუძნება რიცხვთა გაყოფადობას, როცა ამოცანების ალგებრული მიდგომით ამოხსნისას მიიღება ერთ-უცნობიანი წრფივი განტოლება და სხვ. განვიხილოთ რიცხვითი შედარებების და შემთხვევების ანალიზის გამოყენებით რამდენიმე საძიებო, არასტანდარტული, საოლიმპიადო ამოცანა. განსახილავი ამოცანების თემატიკის შერჩევისას მასწავლებელმა განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიაქციოს ამოცანების პრაქტიკაში გამოყენების შესაძლებლობებს. მაგალითად, რეალურ ცხოვრებაში ადამიანებს ყოველდღიურად უხდებათ მინიმუმის და მაქსიმუმის არაერთი ამოცანის გადაწყვეტა. ყველა ადამიანი ფიქრობს დროის მინიმალურ შუალედში შეასრულოს მაქსიმალური სამუშაო, მინიმალური დანახარჯებით მიიღოს მაქსიმალური მოგება და სხვ. ასეთი ამოცანების განხილვა დაწყებითი კლასებიდანვე უნდა დავიწყოთ. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა.

ამოცანა 1. მამილო კარლს აქვს 130 დაფა. 5 დაფისგან მას შეუძლია გააკე-თოს სათამაშო წისქვილი, 7 დაფისგან-თბომავალი, 14 დაფისგან-თვითმფრი-ნავი. თვითმფრინავი 19 ოქრო ღირს, თბომავალი-8 ოქრო, წისქვილი 6 ოქრო. მაქსიმუმ რამდენი ოქროს გამომუშავება შეუძლია მამილო კარლს?

ამოცანის ამოხსნის დაწყებამდე მასწავლებელმა მოსწავლეების ყურადღება უნდა მიაპყროს იმას, თუ რა რაოდენობის მასალას ხარჯავს მამილო კარლი და რამდენ ანაზღაურებას იღებს სანაცვლოდ, რადგან ამოცა-

ნაში მოთხოვნილია მაქსიმალური თანხის გამომუშავება, ხოლო თანხის გამოსამუშავებელი მასალის რაოდენობა შეზღუდულია. მასწავლებელი ყურადღებას გაამახვილებს იმაზე, რომ ერთ თვითმფრინავის დამზადებას ჭირდება ზუსტად იმდენი დაფა-14, რაც ორი თზომავალის დამზადებას, მაგრამ ერთი თვითმფრინავი ღირს უფრო ძვირი, ვიდრე ორი თზომავალი. მასწავლებელი მოს-წავლეებს დაუსვამს კითხვას, რომელი სათამაშოს გაკეთებაა მიზანშეწონილი იმისათვის, რომ მაქსიმალური მოგება მიიღოს მამილო კარლმა? როცა დადგინდება, რომელი სათამაშოს გაკეთებაა მიზანშეწონილი, ამის შემდეგ სათანადო კითხვებით გაარკვევს რამდენი ასეთი სათამაშო უნდა დამზადდეს. მოსწავლეები გააცნობიერებენ, რომ აზრი არა აქვს ერთზე მეტი თზომავლის გაკეთებას. ამასთან, მოსწავლეებმა უნდა დაადგინონ რა შემთხვევაში უნდა გაკეთდეს თზომავალი და რა შემთხვევაში არა. შემდეგ გადადის სხვა სათამა-შოების დამზადების შესაძლებლობების გარკვევაზე. 15 დაფიდან შეიძლება გაკეთდეს სამი წისქვილი (შემოსავალი 18 ოქრო) ან თვითმფრინავი (შემოსავალი 19 ოქრო და მორჩენილი 1 დაფა). ამ შემთხვევაშიც სათანადოდ დასმული კითხვებით მოსწავლეები მივლენ დასკვნმდე, რომ აზრი არა აქვს არაუმეტეს ორი წისქვილის გაკეთებას. აქაც მოსწავლეები უნდა გაერკვნენ რატომ და როდის უნდა გააკეთოს მამილო კარლმა ორი ან ერთი წისქვილი, ან საერთოდ არ გააკეთოს წისქვილი. ეს ნიშნავს, რომ მამილო კარლმა შეიძლება დახარჯოს არაუმეტეს $7+2\cdot5=17$ დაფა. ამის შემდეგ ამოცანის ამოხსნა მარტივია. თვითმ-ფრინავი უნდა გააკეთოს 8 ან 9. მეორე შემთხვევაში ჩვენ მივიღებთ მხოლოდ 9 თვითმფრინავს, პირველ შემთხვევაში 8 თვითმფრინავთან ერთად დაფები ეყოფა კიდევ ორ წისქვილს და თზომავალს (რომელიც თვითმფრინავზე ძვირი ღირს) და დარჩება კიდევ ერთი დაფა. საბოლოოდ, მამილო კარლის მიერ გა-მომუშავებული მაქსიმალური თანხა იქნება

$$8 \cdot 19 + 2 \cdot 6 + 8 = 172 \text{ (ოქრო)}.$$

ამოცანა 2. ზღაპრების ქვეყანაში მიმოქცევაშია 1, 2, 3, ... , 19, 20 კვინტოს მო-ნეტები (კვინტო-ჩვენს მიერ გამოგონილი ფულის ერთეულია). სხვა მონეტები ზღაპრების ქვეყანაში არ არსებობს. ბურატინოს ქონდა ერთი მონეტა. მან იყიდა ნაყინი და ხურდაში მიიღო ერთი მონეტა. შემდეგ ისევ იყიდა ისეთივე ნაყინი და ხურდაში მიიღო სამი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მონეტა. ბურატინოს უნდოდა კიდევ ეყიდა ისეთივე ნაყინი, მაგრამ ფული არ ეყო. რა ღირს ნაყინი?

მოსწავლეებისათვის შეიძლება უცნაური იყოს 17 კვინტოიანი მონე-

ტის არსებობა, მაგრამ მასწავლებელი აუხსნის, რომ ეს ზღაპრიდანაა, ხოლო ზღაპარში ყველაფერი შეიძლება მოხდეს. მოსწავლეები უნდა გაერკვნენ რომელია ზღაპრების ქვეყანაში მინიმალური და მაქსიმალური ღირებულების მონეტები. მასწავლებელი მოსწავლეებს დაუსვამს შესაბამის კითხვებს, რომლითაც დაადგენს, რომ ბურატინოს მაქსიმუმ შეიძლებოდა ქონოდა 20 კვინტო და ნაყინი არ შეიძლება ღირდეს 7 კვინტოზე ნაკლები. ამის შემდეგ მოსწავლეებმა გაარკვევენ მინიმუმ რამდენი კვინტოს დაუბრუნებდნენ ბურატინოს ხურდაში სამი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მონეტით? ცხადია, ეს 1, 2 და 3 კვინტოიანი მონეტებია და მათი ჯამი 1+2+3=6 კვინტოა. რას გვეუბნება ის, რომ ბურატინომ 6 კვინტოდ ნაყინი ვერ იყიდა? რადგან ეს ფული მას არ ეყო ნაყინის საყიდლად, ამიტომ ნაყინის ღირებულება არანაკლებ 7 კვინტოა. ამის შემდეგ მოსწავლეები მარტივად დაადგენენ, რომ ნაყინი ღირს ზუსტად 7 კვინტო. ნაყინის ყიდვა და გადახდა შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:

$$20 - 7 = 13, \ \ 13 - 7 = 6 = 1 + 2 + 3.$$

ამოცანა 3. ირინეს ძალიან უყვარს კანფეტები. სტომატოლოგმა ირინეს აუკრძალა შეჭამოს დღეში 10 კანფეტზე მეტი. თუ ირინე რომელიმე დღეს შეჭამს 7 კანფეტზე მეტს, მაშინ შემდეგი ორი დღის განმავლობაში მან არ უნდა შეჭამოს დღეში 5 კანფეტზე მეტი. რა მაქსიმალური რაოდენობის კანფეტები შეუძლია შეჭამოს ირინემ 25 დღის განმავლობაში, თუ ის შეასრულებს სტომატო-ლოგის მითითებებს?

ეს ამოცანაც უკავშირდება კანფეტების მაქსიმალური რაოდენობის გამოთვლას, რომელიც შეუძლია შეჭამოს ირინემ. მისი სტრატეგიაა შეჭამოს რაც შეიძლება მეტი კანფეტი ისე, რომ არ დაარღვიოს სტომატოლოგის მითითება. ამისათვის მან გარკვეული მოთხოვნები უნდა შეასრულოს, რომელიც ამოცანის პირობაშია მოცემული. მასწავლებლის მიერ სათანადოდ დასმული კითხვებით მოსწავლეები მარტივად დაადგენენ, რომ თუ ირინე რომელიმე დღეს (გარდა ბოლო დღისა) შეჭამს 7 კანფეტზე მეტს, მაშინ მას შემდეგი ორი დღის განმავლობაში შეუძლია მაქსიმუმ შეჭამოს არაუმეტეს 5+5=10 კანფეტი, ხოლო 3 დღეში არაუმეტეს 20 კანფეტი. რაც ნიშნავს იმას, რომ ირინესთვის მომგებიანია ამ სამი დღის განმავლობაში ყოველდღიურად შეჭამოს 7 კანფეტი. აქედან გამომდინარეობს, რომ პირველ 24 დღეში ირინესთვის მომგებიანია ყოველდღიურად შეჭამოს 7 კანფეტი, ხოლო ბოლო დღეს მას შეუძლია შეჭამოს 10 კანფეტი. ეს უფრო მომგებიანია ირინესთვის, ვიდრე ბოლო ორ დღეში შეჭამოს 10+5=15 კანფეტი. ე.ი. ირინას მიერ მირთმეული კანფეტების უდიდესი რაოდენობა იქნება: 24 •7+10=178.

საკლასო მეცადინეობაზე ამ ამოცანის ამოხსნის შემდეგ მასწავლებელს შეუძლია მოსწავლეებს საშინაო დავალებად მიცეს ანალოგიური ამოცანა, რომელშიც მოსწავლეებს სათანადო პირობების გათვალისწინებით დასადგენი ექნებათ მინიმუმ რამდენ კანფეტი უნდა შეჭამოს ირინემ კონკრეტულ დროში.

ამოცანა 4. სიმღერის კონკურსში მონაწილეობდა მამალი, ყვავი და გუგული. ჟიურის თითოეულმა წევრმა პერსონალურად შეაფასა კონკურსანტების გამოსვლა. კოდალამ დათვალა, რომ ჟიური შედგებოდა 59 წევრისაგან, ამასთან მამალმა და ყვავმა, ჯამში მიიღეს 15 ხმა, ყვავმა და გუგულმა ჯამში-18 ხმა, ხოლო გუგულმა და მამალმა ჯამში-20 ხმა. კოდალა ცუდად თვლის, მაგრამ მის მიერ დასახელებული რიცხვები რეალურისაგან განსხვავდება არაუმეტეს 13-ით. რამდენმა ჟიურის წევრმა მისცა ხმა ყვავს?

პირველ რიგში, მეთოდური თვალსაზრისით, მასწავლებელმა მოსწავლეებს უნდა გაუმარტოს, რას ნიშნავს ტერმინი რაოდენობის რეალურისაგან გარკვეული რიცხვით განსხვავება. მოსწავლეები უნდა მიხვდნენ, რომ ეს რეალურად არის შუალედი, რომელიც მოიცავს დასახელებული რიცხვიდან გადახრას როგორც ნაკლებობით, ისე მეტობით, რომ გადახრა არ აღემატება მოცემულ რიცხვს. მაგალითად, ამოცანის პირობით კოდალამ დათვალა, რომ ჟიური შედგებოდა 59 წევრისაგან. რადგან მის მიერ დასახელებული რიცხვები რეალურისაგან განსხვავდება არაუმეტეს 13-ით, ამიტომ ჟიურის წევრთა რაოდენობა იყო არანაკლებ 46 და არაუმეტეს 72. ამის შემდეგ მასწავლებელთან ერთად მოსწავლეები დაადგენენ, რას არ აღემატება მამლის და ყვავის, ყვავის და გუგულის, გუგულის და ყვავის მიღებული ხმების რაოდენობა. მოსწავლეები გამოთვლიან, რომ მამლის და ყვავის მიერ მიღებული ხმების რაოდენობა არ აღემატება 28-ს, რადგან 15+13=28. ანალოგიურად, ყვავისა და გუგულის მიერ მიღებული ხმების რაოდენობა არ აღემატება 31, რადგან 18+13=31, ხოლო გუგულისა და მამლის მიერ მიღებული ხმების რაოდენობა არ აღემატება 33-ს, რადგან, 20+13=33. სულ სამივე კონკურსანტის მიერ მიღებული ხმების რაოდენობის მაქსიმუმია

$$(28 + 31 + 33) : 2 = 46.$$

მეორე მხრივ, კოდალას დათვლით ჟიურის წევრთა რაოდენობა ნაკლები არ არის 46-ზე, რადგან 59–13=46. ამიტომ, ჟიურის წევრთა რაოდენობაა 46, ხოლო ყველა უტოლობა გადაიქცევა ტოლობად. ყვავის მიერ მიღებული ხმების რაოდენობა შეიძლება გამოვთვალოთ, როგორც ჟიურის ყველა წევრის ხმათა რაოდენობისა და მამლისა და გუგულის მიერ ჯამში დაგ-

როვილი ხმების სხვაობა: 46-33=13. ე.ი. ყვავს კონკურსზე მიუღია 13 ხმა.

ამოცანა 5. მესაათეს ოთახში ოთხივე კედელზე თითო საათი უკიდია. ოთ-ხივე საათი არასწორ დროს აჩვენებს: პირველი საათი ცდება 2 წუთით, მეორე-3 წუთით, მესამე-4 წუთით და მეოთხე-5 წუთით. ერთხელ, სასეირნოდ წასვლის წინ, მესაათემ გადაწყვიტა გაეგო ზუსტი დრო. საათების ჩვენებები იყო: 14;54, 14:57, 15:02 და 15:03. დაეხმარეთ მესაათეს გაიგოს ზუსტი დრო.

აქაც, წინა ამოცანის მსგავსად, მოსწავლეებს უნდა განვუმარტოთ, რას ნიშნავს საათი ცდება 3 წუთით. წინა ამოცანაში კოდალას შეცდომა ყველა შემთხვევაში იყო ერთნაირი, ის ხმებს ითვლიდა ნაკლებობით, ამ ამოცანაში კი შესაძლებელია ზოგიერთი საათი ნამდვილ დროზე წინ მიდიოდეს, ან ჩამორჩებოდეს ნამდვილ დროს. ამოცანის პირობაში საათებს შორის არანაირი კავშირები გამოკვეთილი არ არის, ეს გაირკვევა მოგვიანებით. მოსწავლეებს არ უნდა შეექმნათ შთაბეჭდილება, რომ ყველა საათი ერთდროულად ან წინ მიდის ან ერთდროულად ჩამორჩება რეალურ დროს. შემდეგ მასწავლებელმა მოსწავლეთა ყურადღება უნდა გაამახვილოს საათების ჩვენებაზე. მასწავლებელმა მოსწავლეებს უნდა დაუსვას ისეთი კითხვები, რომლითაც შესაძლებელი იქნება დადგინდეს რამდენი წუთი შეიძლება იყოს განსხვავება მაქსიმუმ/მინიმუმ საათების ჩვენებებს შორის. თუ მოსწავლეებმა ვერ შენიშნეს მიახვედროს, რომ პირველი და მეოთხე საათების ჩვენებები ერთმანეთისაგან განსხვავდება 9 წუთით. საათებს შორის 9 წუთით სხვაობა მაქსიმუმია, რაც შეიძლება იყოს საათების ჩვენებებს შორის. ეს ნიშნავს, რომ ერთი საათი ცდება 4 წუთით (წინ მიდის ან ჩამორჩება), მეორე კი 5 წუთით (ჩამორჩება ან წინ მიდის). ამიტომ ზუსტი დროა ან 14:59 ან 14:58. პირველ შემთხვევაში მეორე საათი ჩამორჩება 2 წუთით, ხოლო მესამე-წინ მიდის 3 წუთით. მეორე შემთხვევა შეუძლებელია, რადგან საათი, რომელიც აჩვენებს 14:57, ცდება 1 წუთით, რაც ეწინააღმდეგება ამოცანის პირობას. ე.ი. ზუსტი დროა 14:59.

ექსპერიმენტებით დასტურდება, რომ, თუ მოსწავლეები დაწყებით კლასებში ეჩვევიან საძიებო, არასტანდარტული, საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნას რიცხვთა შედარების და შემთხვევათა ანალიზის გამოყენებით, მაშინ ისინი გაცილებით მარტივად ითვისებენ ისეთი სახის საძიებო, არასტანდარტული, საოლიმპიადო განტოლებების/უტოლობების ამოხსნას საბაზო და საშუალო საფეხურებზე, როცა განტოლების/უტოლობის ერთ ნაწილში მოცემული ფუნქციის/ფუნქციათა კომპოზიციის მინიმუმი განტოლების/უტოლობის მეორე ნაწილში მოცემული ფუნქციის/ფუნქცი-

ათა კომპოზიციის მაქსიმუმის ტოლია.

დაწყებითი კლასების მოსწავლეები ინტერესდებიან ისეთი ამოცანების ამოხსნით, რომლებიც უკავშირდება რიცხვთა გაყოფადობას, ასაკის დადგე-ნას, რაიმე სიმრავლის ელემენტების რაოდენობის დადგენას და სხვ. სიმრავ-ლის ელემენტების რაოდენობის დადგენა მოსწავლეებს ეხმარება გარკვეული კლასის ამოცანების ამოხსნაში. მაგალითისათვის განვიხილოთ

ამოცანა 6. სამნი თამაშობენ მაგიდის ჩოგბურთს. წაგებული ისვენებს და ადგილს უთმობს მას, ვინც არ თამაშობდა. ჯამში გოგიმ ითამაშა 10 პარტია, პაპუნამ-15, ხოლო მამუკამ-17. რომელმა მოთამაშემ წააგო მეორე პარტიაში?

მოსწავლეთა უმრავლესობას უყვარს მაგიდის ჩოგბურთის თამაში. მათ იციან თამაშის წესები. შესაძლოა კლასში მაგიდის ჩოგბურთის გამორჩეული მოთამაშეც იყოს, რაც მასწავლებელს შეუძლია გამოიყენოს მოსწავლეთა მოტივიაციის ასამაღლებლად. მოკლე მიმოხილვის შემდეგ მასწავლებელი მოსწავლეთა დახმარებით გადადის ამოცანის ამოხსნაზე. ამოცანის ამოსახსნელად პირველ რიგში უნდა დავადგინოთ სულ რამდენი პარტია ითამაშა სამივემ ერთად. რადგან თამაშობენ ორნი, ამიტომ ნათამაშები პარტია დათვლაში შედის ორჯერ, რაც ნიშნავს, რომ სულ სამივე მოთამაშემ ჯამში ითამაშა (10+15+17):2=21 პარტია. შევნიშნოთ, რომ არცერთს არ შეეძლო გამოეტოვებინა ორი პარტია მიმდევრობით. 21 პარტიაში 11 კენტი ნომრის პარტიაა: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 და 21. 10-ის ტოლია ლუწი ნომრის პარტიების რაოდენობა: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 და 20. ამოცანის პირობით გოგიმ ითამაშა 10 პარტია, ამიტომ მას უთამაშია ყველა ლუწი პარტია და მხოლოდ ეს პარტიები. რადგან მას არ უთამაშია არცერთ კენტ პარტიაში, ე.ი. არ უთამაშია არც მესამე პარტიაში, ეს ნიშნავს, რომ მან მეორე პარტია წააგო.

ჩვენ ვიხილავთ ისეთ საძიებო ამოცანებს ასაკის დადგენაზე და რიცხვთა გაყოფადობაზე, რომლებსაც ვუკავშირებთ რიცხვის მარტივ მამრავლებად დაშლას და მასზე დაყრდნობით ვახდენთ რიცხვის მამრავლებად დაშლის სხვადასხვა კომბინაციების შედგენას, რომელშიც ზოგიერთი თანამამრავლი შესაძლოა მარტივი რიცხვი არც იყოს და ვახდენთ მათ ადაპტირებას ამოცანის პირობასთან. ასეთი მეთოდური მიდგომები მოსწავლეებში აღძრავს ინტერესს და უჩნდებათ მზაობა ასეთი სახის საძიებო ამოცანების ამოსახსნელად. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ

ამოცანა 7. როცა მათემატიკოსს მისი შვილების ასაკის შესახებ ჰკითხეს,

უპასუხა: მე და ჩემს მეუღლეს სამი შვილი გვყავს. როცა პირველი შვილი დაიბადა, მაშინ ოჯახის წევრთა ასაკთა ჯამი იყო 45 წელი, ერთი წლის წინ, როცა მესამე შვილი დაიბადა-70 წელი, ახლა, ბავშვების ასაკთა ჯამია 14 წელი. რამდენი წლისაა თითოეული ბავშვი, თუ ცნობილია, რომ ოჯახის ყველა წევრს დაბადების დღე ერთი და იმავე თვის ერთსა და იმავე რიცხვში აქვს?

მოსწავლეებიდან ზოგიერთმა შეიძლება არ იცოდეს და მასწავლებელმა მათ უნდა განუმარტოს, რომ ადამიანის ასაკი გამოისახება არაუარყოფითი მთელი რიცხვით. რადგან, ახლა ყველა ბავშვის ასაკთა ჯამი 14 წელია და მესამე ბავშვი შარშან დაიბადა, ამიტომ ერთი წლის წინ ბავშვების ასაკთა ჯამი იყო 11 წელი, რაც ნიშნავს, რომ მშობლების ასაკთა ჯამი იყო 59 წელი. პირველი შვილის დაბადების დროს მშობლების ასაკთა ჯამი იყო 45 წელი, ამიტომ პირველი შვილის დაბადებიდან მესამე შვილის დაბადებამდე გასულა (59–45):2=7 წელი. ცხადია, რომ პირველი შვილი შარშან იყო 7 წლის, მეორე კი-4 წლის. საბოლოოდ დავასკვნით, რომ ახლა უფროსი შვილი 8 წლისაა, მეორე შვილი 5 წლის, მესამე კი ერთი წლის.

განსაკუთრებით საინტერესოა ტყუპების ასაკის დადგენის საძიებო ამოცა-ნების განხილვა. განვიხილოთ

ამოცანა 8. ერთმანეთს შეხვდა დიდი ხნის უნახავი ორი მათემატიკოსი. რამდენი შვილი გყავს?-ეკითხება პირველი მეორეს. სამი ბიჭი, პასუხობს მეორე. რამდენი წლის არიან? მეორე პასუხობს: თუ გაამრავლებთ სამივე ბიჭის წლოვანებებს, მიიღებთ 36-ს, ხოლო თუ შეკრებთ, მივიღებთ შენი სახლის ნომერს. პირველი მათემატიკოსისთვის ინფორმაცია საკმარისი არ აღმოჩნდა. მეორე მათემატიკოსმა ცოტა ხანს იფიქრა და უთხრა: უფროს ბიჭს ცისფერი თვალები აქვს. ამის შემდეგ პირველმა მათემატიკოსმა მეორეს ზუსტად უთხრა რამდენი წლისაა თითოეული ბიჭი. როგორ შეძლო მან ეს? რა ნომერ სახლში ცხოვრობს პირველი მათემატიკოსი?

ამოცანის ამოსახსნელად მასწავლებელმა მოსწავლეებს პირველ რიგში უნდა შეადგენინოს ყველა ისეთი სამეული, რომელთა ნამრავლია 36. ასეთი სამეულებია: 1, 1, 36/1, 2, 18/1, 3, 12/1, 4, 9/1, 6, 6/2, 2, 9/2, 3, 6/ 3, 3, 4. მოსწავლეები შეკრებენ სამეულებს. მიიღებენ შესაბამისად: 38, 21, 16, 14, 13, 13, 11, 10. ამ რიცხვებს შორის მხოლოდ 13 გვხვდება ორჯერ. ჩვენგან განსხვავებით, პირველმა მათემატიკოსმა თავისი სახლის ნომერი იცის და რადგან ვერ განსაზღვრა ბიჭების ასაკი, ამიტომ მისი სახლის ნომერია 13. ბიჭების ასაკის ცალსახად დადგენა მოხდა მეორე მათემატიკოსის ნათქვამის შემდეგ, როცა მან უთხრა, რომ უფროს ბიჭს ცისფერი თვალები ქონდა. ეს პასუხი მოსწავლეებისათვის დამაბნეველია, რადგან რა შუაშია ცისფე-

რი თვალები და ასაკი ერთმანეთთან, მაგრამ პასუხში იმალება ის ინფორმაცია, რომელიც ამოცანის ამოხსნის გასაღებს წარმოადგენს. კერძოდ, რომ მის შვილებს შორის ერთი უფროსია. ჩვენ ორ კომბინაციას 1, 6, 6 და 2, 2, 9 შორის ერთ შემთხვევაში ტყუპები არიან უფროსები, ხოლო მეორე შემთხვევაში ერთი უფროსია, რომელიც 9 წლისაა, ხოლო ორი ტყუპები არიან, რომელთა ასაკია 2 წელი. ე.ი. პირველი მათემატიკოსის ორი ტყუპი 2 წლისაა, უფროსი 9 წლისაა და თანაც ცისფერი თვალები აქვს. პირველი მათემატიკოსის სახლის ნომერია 13.

ამოცანა 9. გემის კაპიტან კაუჭას ოთხი ბიჭი და რამდენიმე გოგონა ყავს. თუ 100 წელზე ნაკლები კაპიტანის წლოვანებას გავამრავლებთ მისი შვილების რაოდენობაზე და მისი გემის სიგრძეზე, რომელიც ფუტების მთელი რიცხვით გამოისახება, მაშინ მივიღებთ 32118. რამდენი წლის არის კაპიტანი კაუჭა, რამდენი შვილი ყავს და რა სიგრძისაა გემი?

პირველ რიგში მოვახდინოთ 32118-ის დაშლა მარტივ თანამარავლთა ნამრავლად. გვაქვს: $32118 = 2 \cdot 3 \cdot 53 \cdot 101$. ამოცანის პირობით კაპიტნის შვილე-ბის რაოდენობა 5-ზე ნაკლები არ არის. ცხადია, რომ კაპიტნის წლოვანებაც და გემის სიგრძეც 3-ზე მეტია. ამიტომ 32118 რიცხვი წარმოვადგინოთ სამი თანამარავლის ნამრავლად, რომელთაგან თითოეული 3-ზე მეტია. არსებობს მხოლოდ ერთადერთი ასეთი წარმოდგენა, რომელსაც აქვს სახე: $6 \cdot 53 \cdot 101$. თუ მხედველობაში მივიღებთ შეზღუდვებს კაპიტნის ასაკზე და მისი შვილების რაოდენობაზე მარტივად დავადგენთ, რომ კაპიტანი 53 წლისაა, მას 6 შვილი ყავს და მისი გემის სიგრძეა 101 ფუტი.

მასწავლებელმა საშინაო დავალებად მოსწავლეებს შეიძლება შეთავაზოს მსგავსი ამოცანები, რომელთა სირთულე კლასში განხილული ამოცანების სირთულეზე დაბალი იქნება. ცხადია, განხილული ამოცანები არ ამოწურავს თემის ყველა სახეს, მაგრამ ნათელ წარმოდგენას იძლევა, როგორი ფორმით უნდა წარმართოს სასწავლო პროცესი და როგორი სახის ამოცანების ჩართვაა მიზანშეწონილი დაწყებითი კლასების მათემატიკის სასწავლო პროცესში. ასეთი სახის ამოცანების ამოხსნა მოსწავლეებისაგან საჭიროებს ადრე მიღე-ბული ცოდნის აქტივიზაციას და მის საფუძველზე ახალი ცოდნის დამოუკი-დებლად შექმნას, რაც მოსწავლეებისათვის საინტერესოს და მიმზიდველს ხდის სასწავლო პროცესს.

ლიტერატურა

ბერძულიშვილი, გიორგი, თამარ დოგრაშვილი, ირინე გოგიბერიძე, გიორგი ბრეგაძე. 2021, *საძიებო და საოლიმპიადო მათემატიკური ამოცანები დაწყებით კლასებში (I-VI კლასები)*. ქუთაისი. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა.

ბერძულიშვილი გიორგი და გიორგი ბრეგაძე. 2021. *საშუალო სკოლაში არასტანდარტული მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი მეთოდიკური ასპექტი*. ქუთაისი, აწსუ გამომცემლობა.

ბერძულიშვილი გიორგი, გიორგი ბრეგაძე, გენადი მარგველაშვილი. 2019. *საოლიმპიადო მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის სწავლების სპეციალური მეთოდიკა*. ქუთაისი, აწსუ გამომცემლობა.

ბერძულიშვილი, გიორგი. 2018, *სასკოლო და საოლიმპიადო მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები*. ქუთაისი. აწსუ გამომცემლობა.

ბერძულიშვილი, გიორგი და გიორგი ბრეგაძე. 2017. *საოლიმპიადო მათემატიკურ ამოცანათა ამოხსნის პრაქტიკული ჩვევების ფორმირება საშუალო სკოლაში*. ქუთაისი, აწსუ გამომცემლობა.

ბერძულიშვილი, გიორგი და გიორგი ბრეგაძე. 2016. *საოლიმპიადო მათემატიკური ამოცანები დაწყებით კლასებში*. ქუთაისი, აწსუ გამომცემლობა.

ბერძულიშვილი, გიორგი. 2016. *2017 წელი საოლიმპიადო ამოცანებში და არა მარტო*. ქუთაისი, აწსუ გამომცემლობა.

ბერძულიშვილი, გიორგი და გიორგი ბრეგაძე. 2015. *მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები*. ქუთაისი, აწსუ გამომცემლობა.

მათემატიკის ეროვნული სასწავლო გეგმა 2018-2024 წლები. თბილისი.

მორალიშვილი, თამაზ. 1991. *ამოცანათა ამოხსნის ძიების სწავლება საშუალო სკოლაში*. თბილისი, განათლება.

მორალიშვილი, თამაზ, გიგლა ონიანი, გიორგი ჯინჯიხაძე. 2008. *სასწავლო საქმიანობის სუბიექტის ფორმირება დაწყებით და საბაზო სკოლაში არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეშვეობით*. თბილისი, გამომცემლობა უნივერსალი.

ჩხიკვაძე, ირმა და გიორგი ბერძულიშვილი. 2022. *განმავითარებელი და საძიებო ტექსტური ალგებრული ამოცანების ამოცანების ამოხსნის სწავლება საშუალო სკოლაში*. ქუთაისი, აწსუ გამომცემლობა.

Djurakulova, A. 2019. „A System of Exercises Promoting the Development of Creative Abilities of Junior School Children in Mathematics Classes". *European Journal of Research and Reflection in Educational Sciences*, 2019, 7(12).

http://www.idpublications.org/wp-content/uploads/2019/12/Full-Paper-A-system-of-exercises-promoting-the-development-of-creative-abilities-of-junior-schoolchildren.pdf

Gazizov E. R., Gazizova S., E., Kiseleva, N. G. & Zinnatullina, A. N. 2018. „Heuristic Methods for Solving the Creative Problems“. *Herald NAMSCA 3. 2018.*

http://journals.uran.ua/visnyknakkkim/article/view/171920

Khalmuratovna, Djurakulova, A. 2020 . „The Role of Non-standard Tasks in the Teaching Mathematics of Primary School“. *JournalNX,* 2020. 329-335.
https://caritulisan.com/paper/336081/the-role-of-non-standard-tasks-in-the-teaching-mathematics-of-primary-school

Polya, George. 1981. *Mathematical Discovery*. New York: Wiley.

Sailaubek, Y. & Imanbek, B. 2020. „Methods of solving non-standard inequalities“. *International Scientific Journals of Scientific Technical Union of Mechanical Engineering*, 2020, 4: 51-53. https://stumejournals.com/journals/mm/2020/2/51

Safuanov, I. 2014. *Teaching Pre-Service Mathematics Teachers to Solve Non-Standard Problems.* Moscow City Pedagogical University.

http://tamop2014.tok.elte.hu/dok/szakmai_anyagok/tp_modszertani_anyagok/Szitanyi_Judit_2014_Fokuszban_a_tanulo_kotet.pdf#page=55

Sapazhanov, Y., Manap, T., & Uderbayeva, K. 2021. „Developing Student' Logical Thinking by Solving Non-Standard Tasks“. Suleyman Demirel University Bulletin: *Pedagogy and Teaching Methods*, 56(3), 2021: 75-83.

https://journals.sdu.edu.kz/index.php/ptm/article/view/601

Каплан, Борис, Николай Рузин, Абрам Столяр. 1981. *Методы обучения математике. (Некоторые вопросы теории и практики)*. Минск: „Народная Асвета“.

სტატია იბეჭდება აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გრანტის ფარგლებში.

Education

Using numerical comparison and case analysis in solving the text-based problems in the primary grades

Giorgi Berdzulishvili
giorgi.berdzulishvili@atsu.edu.ge
Akaki Tsereteli State University
Giorgi Bregadze
Kutaisi Andria Razmadze school of physics and mathematics No. 41
Irine Gogiberidze
irine.gogiberidze@atsu.edu.ge
Tamar Dograshvili
tamar.dograshvili@atsu.edu.ge
Irma Chkhikvadze
irma.chkhikvadze@atsu.edu.ge
Akaki Tsereteli State University
Kutaisi, Georgia

Solving exploratory, non-standard, Olympiad mathematical problems is a creative and methodically challenging process. Solving the problem requires full consideration of all its components. Special attention should be paid to the use of numerical comparisons and case analysis in solving exploratory, non-standard, Olympiad problems in the primary grades. The complexity of the problem under consideration is determined only by the teacher and depends on the level of students performance, their mental and psycho-physiological data, school and study/teaching profile. The problems discussed in the article give a clear idea to elementary school mathematics teachers, in what form the learning process should be conducted and what kind of problems should be included in mathematics teaching process in the primary grades. Solving such problems requires students to activate previously acquired knowledge and create new knowledge on that basis, which makes the learning process interesting and attractive for students. Having carefully studied the article, the teacher will easily be able to create similar problems, which will be used later in the teaching process. At the end of the article, relevant methodological conclusions were drawn.

Keywords: *exploratory problem, text-based problem, numerical comparison, case analysis, methodology.*

The national curriculum for mathematics clearly defines in which classes what kind of text problems should be studied. But it does not specify what kind of text-based problems should be considered in the educational process, because the national curriculum for mathematics gives the teacher freedom of choice, he/she can choose what kind of problems (algorithmic, exploratory, developmental, Olympiad, interdisciplinary, etc.) to select and include in the educational process; to teach algorithmic, private or special techniques of solving them. This choice is possible in accordance with Article 12 (National Mathematics Curriculum, 2018-2024, 13): "The school is required to ensure in-depth learning: step-by-step and comprehensive delivery of learning material, thorough discussion of new issues and concepts in different contexts". On it basis, in school, it is possible to include different types of exploratory, non-standard, Olympiad problems in the process of teaching mathematics, which have a high developmental effect. In school textbooks on mathematics, algorithmically solvable text-based problems are mainly discussed, which have less developmental effect than exploratory, non-standard and Olympiad problems. It is not possible for elementary school mathematics teachers to find such problems and develop methodically methods/techniques to solve them, because in Georgian reality, no one in the past has taught these issues. The analysis of mathematics and primary education curricula of accredited higher education institutions in Georgia revealed that private and special methods of solving exploratory and Olympiad problems are not taught in mathematics methodology training courses, which is also one of the factors hindering the inclusion of such problems in the educational process. Fundamental research on the methods/techniques of solving exploratory, non-standard and Olympiad problems and their inclusion in the educational practice of primary classes is conducted at Akaki Tsereteli State University, but the dissemination of research findings to a wider range of mathematics teachers still remains a challenge.

A number of studies have been devoted to the methodical processing of exploratory, non-standard, Olympiad problems at school, both abroad and in Georgia. First of all, it is necessary to properly train mathematics teachers so that they can solve exploratory, non-standard, Olympiad problems perfectly and teach them as well. In this regard, G. Poya (Polya 1981: 12) believes that future mathematics teachers are required to master the skills of solving mathematical problems. He believes that solving non-standard mathematical problems is a truly creative work. Moreover, he emphasizes the need to consider various different methods of solving non-standard mathematical problems, for which he has established general rules and considers mandatory their consistent use when solving non-standard problems: the teacher should clarify the essence of the problem to be solved, the students should be able to fully understand the statement of a problem, have a complete understanding of a problem, to remember if they have solved a similar problem, and if they have solved it, to remember how they solved it, to think of an auxiliary problem with less complexity for the problem to be solved, through which it will be possible to solve part of the problem, keep only part of the statement, omit the rest, and so on. Approximately the same approach is used in the paper (Safuanov 2014: 55–59).

In the paper (Gazizov ... 2018) the authors believe that studying different methods of solving non-standard problems contributes to the development of unconventional thinking, which helps people to solve creative problems. According to him, those people who think standardly can create nothing new. He believes that a creative problem is an excellent way to reveal the personal abilities of each person, and heuristic methods of solving the problems allow to activate a person's creative abilities, which improves their employment opportunities in the real life.

Some authors have attempted to determine the role of exploratory, non-standard, Olympiad problems in the educational practice of primary grades (Khalmuratova 2020). They establish systems of exercises that contribute to the development of different types of thinking (logical, creative, etc.) of elementary school students, for which various approaches and methods/techniques for solving exploratory, non-standard, Olympiad problems are used (Sapazhanov ... 2021, Djurakulova 2019, Sailaubek & Imanbek 2020). The issues of solving and teaching exploratory, non-standard, Olympiad problems are fundamentally investigated in the paper (Kaplan ... 1981), in which the authors highlight three types of educational situations, which are related to different strategies of teaching problem solving at school: I- solving such standard problems, the general solutions of which are not known to students; II - solving such standard problems the solutions of which are already known to students; III- solving non-standard problems (Kaplan ... 1981: 31). In the process of solving non-standard problems, the authors distinguish two important constituent elements: presentation of the problem and search for a solution. After that, the authors use two different approaches for solving non-standard problems: the first one is based on the presentation of problem in the state space, and the second one is the reduction of problem to sub-problems (Kaplan ... 1981: 121).

In the history of Georgian methodological thought, the research into these issues has no long own history. For the first time, Professor Tamaz Moralishvili produced a scientific study that addresses teaching the solution of non-standard problems. T. Moralishvili singled out two essential elements in the process of solving non-standard problems: the presentation of problem, its translation into the language of mathematics, and the search for the solution of a problem, which depends on the way the problem is presented and is aimed at determining the possibility or impossibility of solving it (Moralishvili 1991). The author discusses two approaches to solving non-standard problems. The first approach is to present the problem in the state space, and the second is to reduce problem to subproblems. He links the concept of problem presentation in the state space with the following notions: initial, target state; description of the statement; operator, transforming one state into another; space of states; search (event) space. It is clear that the more rational is the search method, the narrower is its search space. He considers two types of searches: blind search for all possible options (in-depth search, full search); targeted (orderly) search. T. Moralishvili clearly represents the search process in the state space with a graphic model (Moralishvili ... 2008).

A number of scientific articles and monographs were devoted to the study of exploratory, non-standard, Olympiad problems by our team, in which we dealt with the issues related to teaching and solving exploratory, non-standard Olympiad problems at different levels of education, as well as worked out the systems of more than 5000 exploratory, non-standard, Olympiad problems by grade. The conducted studies confirmed the need to include exploratory, non-standard, Olympiad problems in the educational process of the school in accordance with the age, mental, psycho-physiological abilities of students and the level of their training in mathematics (Chkhikvadze and Berdzulishvili. 2022, Berdzulishvili ... 2021, Berdzulishvili and Bregadze, 2021, Berdzulishvili ... 2019, Berdzulishvili and Bregadze 2017, Berdzulishvili and Bregadze 2016, Berdzulishvili 2016, Berdzulishvili and Bregadze 2015). In addition, we worked on the methodical aspects of solving the school and Olympiad problems with the same methods and the methodical aspects of their inclusion in the educational process at all three levels of general education (Berdzulishvili 2018).

The study of methods/techniques of solving Olympiad, exploratory, non-standard problems and their inclusion in the educational process of the school is particularly relevant not only in our country, but also abroad. This is evidenced by the opinions of Georgian and foreign experts on the grant projects that the authors won both in Georgia and abroad {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc.]. In the last decade, several doctoral theses on the methods of teaching mathematics were devoted to the study of these issues, which were prepared and defended within the framework of the doctoral program Educational Sciences of Akaki Tsereteli State University.

In the article, we have discussed the method of solving exploratory, non-standard Olympiad text-based problems in the primary grades, which is related to numerical comparisons and case analysis. This method is widely used in the teaching practice of the primary grades and does not go beyond the school curriculum, we used this method in solving problems with an arithmetic approach, which is often based on the consideration of all possible cases of any specific quantity given in the statement of problem, or highlighting those subcases from all possible cases, when the event or process described in the statement of problem may or may not occur, when searching for minimum or maximum values, etc. It should be noted that sometimes the use of numerical comparisons gives good results when solving such problems, when the solution of problem is based on the division of integers, when a linear equation with one unknown is obtained when solving the problems using an algebraic approach. Let us consider some exploratory, non-standard, Olympiad problems using numerical comparisons and case analysis. When selecting the topic of the discussed problems, the teacher should pay special attention to the possibilities of using these problems in practice. For example, in the real life, people have to solve many minimization and maximization problems every day. Everyone thinks to do all the work in minimum time, get the maximum profit at minimum cost, and so on. We should start discussing such problems from the primary grades. For illustration, let us consider some of these problems.

Problem 1. Mamilo Karl has 130 boards. Of 5 boards, he can make a toy mill, of 7 boards - a toy motor ship, of 14 boards – a toy airplane. The airplane costs 19 gold, the motor ship costs 8 gold, and the mill costs 6 gold. How much gold can Mamilo Karl earn at most?

Before starting to solve the problem, the teacher should draw the students' attention to how much material Mamilo Karl spends and how much he gets in return, because the problem requires earning the maximum amount of money, and the amount of money-making material is limited. The teacher will point out that making one airplane requires exactly the same number of boards (14) that could be used to make two motor ships, but one airplane costs more than two motor ships. The teacher will ask the students which toy should be made in order for Mamilo Karl to get the maximum profit? When it is determined which toy is appropriate to make, then by asking the appropriate questions, it will be found out how many such toys should be made. Students will realize that there is no point in making more than one motor ship. In addition, the students should determine in which cases a heat engine should be made and in which cases it should not be made. Then he/she moves on to find out the possibilities of making other toys. 15 boards can be used to make three mills (earning 18 gold) or an airplane (earning 19 gold and 1 board left over). In this case too, with properly asked questions, students will come to the conclusion that there is no point in making any more than two mills. Here again, the students have to figure out why and when Mamilo Karl should make two mills, one mill, or no mill at all. This means that Mamilo Karl can spend no more than 7+2·5=17 boards. After that, the problem is easy to solve. There must be made 8 or 9 airplanes. In the second case, we get only 9 airplanes, in the first case with 8 airplanes, the boards will be remained for making two more mills and one motor ship (which costs more than the airplane) and one more board remains. In the end, the maximum amount earned by Mamilo Carl will be

$$8 \cdot 19 + 2 \cdot 6 + 8 = 172 \text{ (gold).}$$

Problem 2. In the watchmaker's room, there is one clock on each of the four walls. All four clocks show the wrong time: the first clock is wrong by 2 minutes, the second - by 3 minutes, the third - by 4 minutes and the fourth - by 5 minutes. Once, before going for a walk, the watchmaker decided to figure out the exact time. The clocks showed: 14:54, 14:57, 15:02 and 15:03. Help the watchmaker to know the exact time.

Here, as in the previous problem, we have to explain to students what it means that the clock is wrong by 3 minutes. In the previous problem, the woodpecker's error was the same in all cases, it counted the votes with less, and in this problem, some clocks may be ahead of the real time, or behind the real time. In the statement of the problem, there are no links between the hours, this will become clear later. Students should not get the impression that all clocks are either moving forward or falling behind real time at the same time. Then the teacher should focus students' attention on the clock screen. The teacher should ask the students questions that will allow them to determine how many minutes can be the difference between the maximum/minimum hour readings. If the students didn't notice, let them understand that the readings of the first and fourth clocks differ from each other by 9 minutes. The difference of 9 minutes between the clocks is the maximum that can be between clock readings. This means that one clock is off by 4 minutes (forward or behind) and the another - by 5 minutes (back or forward). Therefore, the exact time is either 14:59 or 14:58. In the first case, the second clock lags behind by 2 minutes, and the third clock goes ahead by 3 minutes. The second case is impossible because the clock showing 14:57 is off by 1 minute, which contradicts the statement of the problem. That is, the exact time is 14:59.

The experiments have shown that if students in the primary grades are getting used to solving exploratory, non-standard, Olympiad problems using numerical comparisons and case analysis, then they much more easily learn to solve such exploratory, non-standard, Olympiad equations/inequalities at the basic and intermediate levels, when in one part of the equation/inequality, the minimum of the composition of the given function/functions is equal to the maximum of the composition of the function/functions given in the second part of the equation/inequality.

The elementary school students are interested in solving problems related to the division of numbers, determining age, determining the number of elements of a set, and so on. Determining the number of elements of a set helps students solve certain grade problems. It is especially interesting to discuss the exploratory problems for determining the age of twins. Let us consider the problem 3.

Problem 3. Two mathematicians who had not seen each other for a long time met. How many children do you have? - asks the first to the second. Three boys, answers the second. How old are they? The second answers: if you multiply the ages of all three boys, you will get 36, and if we add them up, we will get your house number. The information was not enough for the first mathematician. The second mathematician thought for a while and said: The older boy has blue eyes. The first mathematician then told the second exactly how old each boy was. How did he do it? What house number does the first mathematician live in?

In order to solve the problem, the teacher should first of all make up all the threes whose product is 36. Such threes are: 1, 1, 36/1, 2, 18/1, 3, 12/1, 4, 9/1, 6, 6/2 , 2, 9/2, 3, 6/ 3, 3, 4. Students will sum up the threes. They get respectively: 38, 21, 16, 14, 13, 13, 11, 10. Among these numbers, only 13 appears twice. Unlike us, the first mathematician knows his house number, and since he could not determine the age of the boys, his house number is 13. The age of the boys was determined unambiguously after the second mathematician told him that the older boy had blue eyes. This answer is confusing for students, because what do blue eyes and age have to do with each other, but the answer hides the information that is the key to solving the problem. In particular, that one of his children is an elder. Between our two combinations 1, 6, 6 and 2, 2, 9, in one case the twins are older, and in the other case one is older, who is 9 years old, and two are twins, whose age is 2 years. That is, the two twins of the first mathematician are 2 years old; the eldest is 9 years old and has blue eyes. The house number of the first mathematician is 13.

Problem 4. The captain Kaucha has four boys and several girls. If we multiply the captain's age, which is under 100, by the number of his children and the length of his ship in whole feet, we get 32118. How old is the captain Kaucha, how many children does he have, and how long is his ship?

First, let us decompose 32118 into a product of simple co-factors. We have: according to the statement of problem, the number of the captain's children is not less than 5. It is clear that both the age of the captain and the length of the ship are more than 3. Therefore, let us represent the number 32118 as a product of three co-factors, each of which is greater than 3. There is only one such representation that has the form as follows: if we take into account the restrictions on the captain's age and the number of his children, we easily find that the captain is 53 years old, has 6 children, and his ship is 101 feet long.

The teacher can offer students similar problems as homework, the difficulty of which will be lower than the difficulty of problems discussed in class. Obviously, the discussed problems do not exhaust all aspects of the topic, but they give a clear idea of how the teaching process should be conducted and what kind of problems should be included in junior mathematics classes. Solving such problems requires students to activate previously acquired knowledge and independently create new knowledge on that basis, which makes the learning process interesting and attractive for students.

The article is financed from the grant project of Akaki Tsereteli State University.