მათემატიკური ფიზიკა

მომენტური ძაბვების გათვალისწინებით მდგრადი რხევის პირველი შიგა ერთგვაროვანი ბრტყელი სასაზღვრო ამოცანისათვის საკუთრივი რიცხვისა და საკუთრივი ვექტორ-ფუნქციის პოვნის შესახებ

კოსტა სვანაძე
kostasvanadze@yahoo.com
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი საქართველო

ნაშრომში ვარიაციული მეთოდით დადგენილია, რომ მარტივადბმული ბრტყელი სასრული არის შემთხვევაში, მომენტური დრეკადობის თეორიის მდგრადი რხევის პირველი ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის (როცა არის საზღვარზე გადაადგილების ვექტორი და ბრუნვა ნულს უდრის) საკუთრივი რიცხვი სპეციალურად აგებული ფუნქციონალის უმცირესი მნიშვნელობაა, ხოლო საკუთრივი ვექტორ-ფუნქცია აღნიშნული ფუნქციონალის მამინიზირებელი ვექტორ-ფუნცქიაა.

საკვანძო სიტყვები: *მომენტური დრეკადობის თეორიის, მდგრადი რხევის პირველი შიგა ბრტყელი სასაზღვრო ამოცანა, ვარიაციული მეთოდი, ფუნქციონალი, მამინიზირებელი ვექტორ-ფუნქცია.*

1^0. მომენტური ძაბვების გათვალისწინებით, მდგრადი რხევის ერთგვაროვან განტოლებას ორი განზომილების შემთხვევაში მატრიცული ფორმით აქვს შემდეგი სახე (სვანაძე 1971: 285–288):

$$A(\partial x, v, \sigma)U(x) = A(\partial x, v)U(x) + \sigma^2 U(x) = 0, \qquad (1)$$

სადაც $U = (U_1, U_2)^T$ გადაადგილების ვექტორია,

$$A(\partial x, v) = \left[A_{kj}(\partial x, v)\right]_{2X2}; \qquad (2)$$

$$A(\partial x, v) = \delta_{kj}\Delta(\mu - v\Delta) + (\lambda + \mu + v\Delta)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}, \qquad k, j = 1, 2,$$

Δ-ლაპლასის ოპერატორია, δ_{kj} - კრონეკერის სიმბოლოა, λ, μ და v დრეკადი მუდმივებია. აღნიშნული მუდმივები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\mu > 0, \quad v > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \tag{3}$$

σ რხევის სიხშირეა, $\sigma > 0$.

შევნიშნოთ, რომ

$$A(\partial x, v)U(x) = 0 \tag{4}$$

წარმოადგენს, ორი განზომილების შემთხვევაში, მომენტური დრეკადობის თეორიის სტატიკის ერთგვაროვან განტოლებას.

ვთქვათ, D^+ მარტივადბმული სასრული ორგანზომილებიანი არეა, რომლის საზღვარი S შეკრული $C^{2,\alpha}$, $\quad 0 < \alpha \le 1$, კლასის წირია, $\overline{D^+} = D^+ \bigcup S$.

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (1) განტოლების, რეგულარული $U = (U_1, U_2)^T$ ამონახსნი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$U \in C^1\left(\overline{D^+}\right) \cap C^2\left(D^+\right), \qquad \omega = \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right) \in C^1\left(\overline{D^+}\right) \cap C^2\left(D^+\right).$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ D^+ არეში რეგულარული $U = (U_1, U_2)^T$ და $V = (V_1, V_2)^T$ ვექტორ-ფუნქციებისათვის ადგილი აქვს გრინის შემდეგ ფორმულას (სვანაძე 2021, 207-211)

$$\int\limits_{D^+} \left[V(x)A(\partial x, v)U(x) + E(U, V, v)\right] dx = \int\limits_{S} \left[LV(y)\right]^+ \left[TU(y)\right]^+ d_y S, \tag{5}$$

სადაც

$$LV(y) = L(\partial y)V(y) = \left[V_1(y), V_2(y), \frac{\partial V_2}{\partial y_1} - \frac{\partial V_1}{\partial y_2}\right]^T,$$

$$TU(y) = T(\partial y, v, n(y))U(y) = \left[\tau_1, \tau_2, v\frac{\partial}{\partial n(y)}\left(\frac{\partial U_2}{\partial y_1} - \frac{\partial U_1}{\partial y_2}\right)\right]^T,$$

$$\tau_1 = 2\mu\frac{\partial U_1}{\partial n(y)} + \lambda n_1(y)\,divU(y) + (v\Delta + \mu)n_2(y)\left(\frac{\partial U_2}{\partial y_1} - \frac{\partial U_1}{\partial y_2}\right),$$

$$\tau_2 = 2\mu\frac{\partial U_2}{\partial n(y)} + \lambda n_2(y)\,divU(y) - (v\Delta + \mu)n_1(y)\left(\frac{\partial U_2}{\partial y_1} - \frac{\partial U_1}{\partial y_2}\right),$$

$\dfrac{\partial}{\partial n(y)} = n_1\dfrac{\partial}{\partial y_1} + n_2\dfrac{\partial}{\partial y_2}$, $\qquad n = \left(n_1^{(y)}, n_2^{(y)}\right)^T$ S წირისადმი $\quad y = (y_1, y_2)$ წერტილში გავლებული გარე ნორმალის შესაბამისი ერთეულოვანი ვექტორია,

$$E(V,U,v)=E(U,V,v)=\frac{3\lambda+2\mu}{3}divU\cdot divV+\frac{1}{2}\mu\sum_{p\neq q}^{2}\left(\frac{\partial U_p}{\partial x_q}+\frac{\partial U_q}{\partial x_p}\right)\left(\frac{\partial V_p}{\partial x_q}+\frac{\partial V_q}{\partial x_p}\right)+$$
$$+\frac{1}{3}\mu\sum_{p,q}^{2}\left(\frac{\partial U_p}{\partial x_p}-\frac{\partial U_q}{\partial x_q}\right)\left(\frac{\partial V_p}{\partial x_p}-\frac{\partial V_q}{\partial x_q}\right)+v\sum_{p=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1}-\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1}-\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right). \tag{6}$$

(5)–დან როცა $V=U$ გვაქვს

$$\int_{D^+}\left[U(x)A(\partial x,v)U(x)+E(U,U,v)\right]dx=\int_S\left[LU(y)\right]^+\left[TU(y)\right]^+d_yS\,, \tag{7}$$

სადაც

$$E(U,U,v)=\frac{3\lambda+2\mu}{3}|\,divU\,|^2+\frac{1}{2}\mu\sum_{p\neq q}^{2}\left(\frac{\partial U_p}{\partial x_q}+\frac{\partial U_q}{\partial x_p}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{3}\mu\sum_{p,q}^{2}\left(\frac{\partial U_p}{\partial x_p}-\frac{\partial U_q}{\partial x_q}\right)^2+v\sum_{p=1}^{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1}-\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)\right]^2. \tag{8}$$

(8) დან (იხ. (3)) ნათლად ჩანს, რომ $E(U,U,v)$ დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა. ამასთან $E(U,U,v)=0$ განტოლების ამონახსნია

$$U_1(x)=b_1-ax_2,\qquad U_2(x)=b_2+ax_1,$$

სადაც a,b_1 და b_2 ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია.

შენვიშნოთ რომ (7) ფორმულიდან გამომდინარეობს, (იხ. (1))

თეორემა 1. თუ D^+ არეში $U=(U_1,U_2)^T$ წარმოადგენს (1) განტოლების რეგულარულ ამონახსენს, მაშინ ადგილი აქვს გრინის შემდეგ ფორმულას

$$\int_{D^+}\left[E(U,U,v)-\sigma^2U^2\right]dx=\int_S\left[LU(y)\right]^+\left[TU(y)\right]^+d_yS\,. \tag{9}$$

ახლა განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$I(U,v)=\frac{\Pi(U,v)}{H(U)}, \tag{10}$$

სადაც

$$\Pi(U,v)=\int_{D^+}E(U,U,v)\,dx \tag{11}$$

$$H(U)=\int_{D^+} U^2\,dx \tag{12}$$

$E(U,U,v)$ განსაზღვრულია (8) ფორმულით.

(8) ფორმულის საფუძველზე, მარტივად დავასკვნით, რომ (10) ფუნქციონალი წარმოადგენს დადებითად განსაზღვრულს.

2⁰. ნაშრომში განიხილება შემდეგი ამოცანა

D^+ არეში ვიპოვოთ (1) განტოლების ისეთი $U=(U_1,U_2)^T$ რეგულარული ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\left[L(\partial y)U(y)\right]^+=\left[U_1(y),U_2(y),\frac{\partial U_2}{\partial y_1}-\frac{\partial U_1}{\partial y_2}\right]^+=0,\qquad y\in S\,, \tag{13}$$

აღნიშნული ამოცანა წარმოადგენს მომენტური ძაბვების მდგრადი რხევის პირველ შიგა ერთგვაროვან სასაზღვრო ამოცანას და მას $\begin{pmatrix}\sigma\\ I\end{pmatrix}_0^+$–ით აღვნიშნავთ.

გრინის (9) ფორმულის გამოყენებით, მარტივად მტკიცდება შემდეგი თეორემა

თეორემა 2. $\begin{pmatrix}\sigma\\ I\end{pmatrix}_0^+$ ამოცანას არანულოვანი ამონახსნი გააჩნია.

აღნიშნული თეორემიდან ნათლად ჩანს, რომ $\begin{pmatrix}\sigma\\ I\end{pmatrix}_0^+$ ამოცანას გააჩნია საკუთრივი რიცხვი და საკუთრივი ვექტორ-ფუნქცია.

ქვემოთ დამტკიცებული იქნება რომ $\begin{pmatrix}\sigma\\ I\end{pmatrix}_0^+$ ამოცანის საკუთრივი რიცხვი, განისაზღვრება ტოლობით

$$\sigma^2=I(U,v)=\frac{\Pi(u,v)}{H(U)}>0\,, \tag{14}$$

სადაც $U=(U_1,U_2)^T$ არის $I(U,v)$–ს მამინიზირებელი ვექტორ ფუნქცია. ანუ $\begin{pmatrix}\sigma\\ I\end{pmatrix}_0^+$ ამოცანის საკუთრივი ფუნქცია.

3⁰. $\begin{pmatrix}\sigma\\ I\end{pmatrix}_0^+$ ამოცანის ამოხსნა.

აღნიშნული ამოცანის ამოხსნა მოცემულ იქნება (Svanidze 2020 65-70) შრომაში განხილული მეთოდით, რომელიც ეფუძნება ა. ბიწაძის მეთოდს (Бицадзе 1976). ადგილი აქვს შემდეგ თორემას.

თეორემა 3. (10) ფუნქციონალის მამინიზირებელი $U=\left(U_1,U_2\right)^T$ ვექტორ-ფუნქცია წარმოადგენს $\begin{pmatrix}\sigma\\ I\end{pmatrix}_0^+$ ამოცანის საკუთრივ ვექტორ-ფუნქციას, თუ ის აკმაყოფილებს (13) სასაზღვრო პირობას.

დამტკიცება. ვთქვათ, (10) ფუნქციონალის მამინიზირებელი $U=\left(U_1,U_2\right)^T$ ვექტორ–ფუნცქია აკმაყოფილებს (13) სასაზღვრო პირობას. დავამტკიცოთ, რომ $U=\left(U_1,U_2\right)^T$ წარმოადგენს $\begin{pmatrix}\sigma\\ I\end{pmatrix}_0^+$ ამოცანის ამონახსენს.

ამ მიზნით განვიხილოთ $U\left(x\right)+\varepsilon h\left(x\right)$ ვექტორ-ფუნქცია, სადაც ε ნებისმიერი სკალარული მუდმივია, ხოლო $h=\left(h_1,h_2\right)^T\neq 0$ D^+ არეში ნებისმიერი რეგულარული ვექტორ-ფუნქციაა, ამასთან აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\left[L\left(\partial y\right)h\left(y\right)\right]^+=\left[h_1\left(y\right),h_2\left(y\right),\frac{\partial h_2}{\partial y_1}-\frac{\partial h_1}{\partial y_2}\right]^T=0,\quad y\in S. \tag{15}$$

შევნიშნოთ, რომ ელემენტალური გამოთვლების შედგად მივიღებთ (იხ. (10) და (14))

$$\phi\left(\varepsilon\right)=I\left(U+\varepsilon h,v\right)=\frac{\Pi\left(U+\varepsilon h,v\right)}{H\left(U+\varepsilon h\right)}=\frac{\Pi\left(U,v\right)+2\varepsilon\Pi\left(U,h,v\right)+\varepsilon^2\Pi\left(h,v\right)}{H\left(U\right)+2\varepsilon H\left(U,h\right)+\varepsilon^2 H\left(h\right)}\geq\sigma^2,$$

სადაც (იხ. (6) (8) და (12))

$$\Pi\left(U,h,v\right)=\int_{D^+}E\left(U,h,v\right)dx, \tag{17}$$

$$\Pi\left(U,h\right)=\int_{D^+}Uh\,dx. \tag{18}$$

შევნიშნოთ, რადგან $\phi\left(\varepsilon\right)$ ფუნქციას $\varepsilon=0$ მნიშვნელობაზე აქვს მინიმალური მნიშვნელობა, ამიტომ $\phi'\left(0\right)=0$. მეორე მხრივ, გამომდინარე აქედან დავწერთ (იხ. (16))

$$\phi'(0)=2\frac{\Pi(U,h,v)H(U)-\Pi(U,v)H(U,h)}{H^2(U)}=0,\quad H(U)\neq 0,$$

საიდანაც (12) და (14) ტოლობების საფუძველზე მივიღებთ

$$\Pi(U,h,v)=\sigma^2 H(U,h). \tag{19}$$

ახლა (5)-ში, თუ დაუშვებთ $V=h$, მაშინ (1), (15), (17), (18) და (19) ფორმულების გათვალისწინების შედეგად დავწერთ

$$\int_{D^+} h(x)\left[A(\partial x,v)U(x)+\sigma^2 U(x)\right]dx=0. \tag{20}$$

(20) ფორმულის მარცხენა მხარეში, მხედველობაში თუ მივიღებთ იმ ფაქტს, რომ D^+ არეში $h(x)$ ნებისმიერი ნულისაგან განსხვავებული რეგულარული ვექტორ-ფუნქციაა, მაშინ მარტივად დავასკვნით, რომ (10) ფუნქციონალის მამინიზირებელი $U(x)$ ვექტორ-ფუნქცია წარმოადგენს (1) განტოლების ამონახსენს და აკმაყოფილებს (13) სასაზღვრო პირობას.

ამრიგად, თეორემა 3 სამართლიანია.

დასასრულს, შევნიშნოთ შემდეგი. თეორემა 3-სა და (14) ტოლობის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, თუ $U(x)$ წარმოადგენს $I(U,v)$ ფუნქციონალის მამინიზირებელ ვექტორ-ფუნცქიას, მაშინ $\sigma^2=I(U,v)>0$ არის $\left(\overset{\sigma}{I}\right)_0^+$ ამოცანის უმცირესი საკუთრივი რიცხვი.

ლიტერატურა

სვანაძე, კ. 2021. „მომენტური დრკადობის თეორიის სტატიკის პირველი ბრტყელი შიგა სასაზღვრო ამოცანის ვარიაციული მეთოდით ამოხსნის შესახებ“. *აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მოამბე*, 2. 2021: 207–211.

Svanadze, K. N. 2020. "On the finding a proper number and proper vector-function for first plane interior homogeneous boundary value problem of steady state oscillations in the linear theory of elastic mixture". *Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics.* Vol. 70, 2020: 65-70.

Бицадзе, А.В. 1976. *Уравнения математической физики*. Москва: Наука.

Сванадзе К. Н. 1971. "О решении основных плоских граничных задач установившихся колебаний с учетом моментных напряжений". *Сообщения Академии наук Грузинской ССCP*. Буллетин, т. 62. 1971: 285-288.

Mathematical Physics

On finding a proper number and proper vector-funciton for first plane interior homogeneous boundary value problem of stationary oscillation with regard to moment strains

Kosta Svanadze
kostasvanadze@yahoo.com
Akaki Tsereteli state university
Kutaisi, Georgia

In the paper by variation method it is stated that in the case of a finite simply connected plane domain a minimal proper of the first homogeneous boundary value problem, of stationary oscillations with regard to moment strains (when on the boundary domain the displacement vector and the rotation are equal to zero) is equal to the minimum value of the specially constructed functional, minimizing vector-function of the functional represent a proper vector-- function of the problem.

Keywords: *the first plane interior boundary value problem of stationary oscillations with regard to moment strains, variation method, functional, minimizing vector-function.*

1⁰. The homogeneous equation of stationary oscillations with regard to moment strains for the two – dimensional ease can be written in the matrics form as (Svanadze 1971)

$$A(\partial x, v, \sigma)U(x) = A(\partial x, v)U(x) + \sigma^2 U(x) = 07 \qquad (1)$$

where

$$A(\partial x, v) = \left[A_{kj}(\partial x, v) \right]_{2X2} 7 \qquad (2)$$

$$A(\partial x, v) = \delta_{kj} \Delta(\mu - v\Delta) + (\lambda + \mu + v\Delta)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}, \qquad k, j = 1, 27$$

δ_{kj} is Kroneker's symbol, Δ is the Laplace operator, $U = (U_1, U_2)^T$ is vector displacement, λ, μ and v are elastic constants, In the sequal is assumed that

$$\mu > 0, \quad v > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \qquad (3)$$

σ is the oscillation frequency $\sigma > 0$.

Note that

$$A(\partial x, \nu)U(x) = 0, \tag{4}$$

represent the homogeneous equation of statics of the moment elasticity theory, for the two-dimensional case.

Let D^+ be a finite domain bounded by a closed curve S $\in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$, $\overline{D^+} = D^+ \bigcup S$ 8 In what follows we assume that

$U \in C^1\left(\overline{D^+}\right)$ [redacted] $D^+)$, $\omega =$ [redacted] $\in C$ [redacted] $D^+)$.

Note that for a regular $U = (U_1, U_2)^T$ and $V = (V_1, V_2)^T$ vector-functions we have Green's formula (Svanadze 2021)

$$\int_{D^+} \left[V(x)A(\partial x,\nu)U(x) + E(U,V,\nu)\right]dx = \int_S \left[LV(y)\right]^+ \left[TU(y)\right]^+ d_yS, \tag{5}$$

where

$$LV(y) = L(\partial y)V(y) = \left[V_1(y), V_2(y), \frac{\partial V_2}{\partial y_1} - \frac{\partial V_1}{\partial y_2}\right]^T,$$

$$TU(y) = T(\partial y, \nu, n(y))U(y) = \left[\tau_1, \tau_2, \nu \frac{\partial}{\partial n(y)}\left(\frac{\partial U_2}{\partial y_1} - \frac{\partial U_1}{\partial y_2}\right)\right]^T,$$

$$\tau_1 = 2\mu \frac{\partial U_1}{\partial n(y)} + \lambda n_1(y)\, divU(y) + (\nu\Delta + \mu)n_2(y)\left(\frac{\partial U_2}{\partial y_1} - \frac{\partial U_1}{\partial y_2}\right),$$

$$\tau_2 = 2\mu \frac{\partial U_2}{\partial n(y)} + \lambda n_2(y)\, divU(y) - (\nu\Delta + \mu)n_1(y)\left(\frac{\partial U_2}{\partial y_1} - \frac{\partial U_1}{\partial y_2}\right),$$

$$E(V,U,\nu) = E(U,V,\nu) = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} divU \cdot divV + \frac{1}{2}\mu \sum_{p \ne q}^{2} \left(\frac{\partial U_p}{\partial x_q} + \frac{\partial U_q}{\partial x_p}\right)\left(\frac{\partial V_p}{\partial x_q} + \frac{\partial V_q}{\partial x_p}\right) +$$

$$+\frac{1}{3}\mu \sum_{p,q}^{2} \left(\frac{\partial U_p}{\partial x_p} - \frac{\partial U_q}{\partial x_q}\right)\left(\frac{\partial V_p}{\partial x_p} - \frac{\partial V_q}{\partial x_q}\right) + \nu \sum_{p=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right). \tag{6}$$

From (5) when $V = U$ we obtain

$$\int_{D^+} \left[U(x)A(\partial x,\nu)U(x) + E(U,U,\nu)\right]dx = \int_S \left[LU(y)\right]^+ \left[TU(y)\right]^+ d_yS, \tag{7}$$

Where

$$E(U,U,v)=\frac{3\lambda+2\mu}{3}|divU|^2+\frac{1}{2}\mu\sum_{p\neq q}^{2}\left(\frac{\partial U_p}{\partial x_q}+\frac{\partial U_q}{\partial x_p}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{3}\mu\sum_{p,q}^{2}\left(\frac{\partial U_p}{\partial x_p}-\frac{\partial U_q}{\partial x_q}\right)^2+v\sum_{p=1}^{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1}-\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)\right]^2. \tag{8}$$

Due to (3) it follows that $E(U,U,v)$ is the positively defined quadratic form, also note that the equation $E(U,U,v)=0$ admits a solution

$$U_1(x)=b_1-ax_2, \qquad U_2(x)=b_2+ax_1,$$

where a,b_1 and b_2 are an arbitrary real constants.

From (7) we have

Theorem 1. If $U=(U_1,U_2)^T$ is a regular solution to (1) then we have the following Green formula

$$\int_{D^+}\left[E(U,U,v)-\sigma^2U^2\right]dx=\int_S\left[LU(y)\right]^+\left[TU(y)\right]^+d_yS. \tag{9}$$

Let us consider the functional

$$I(U,v)=\frac{\Pi(U,v)}{H(U)}, \tag{10}$$

where

$$\Pi(U,v)=\int_{D^+}E(U,U,v)\,dx, \tag{11}$$

$$H(U)=\int_{D^+}U^2\,dx, \tag{12}$$

$E(U,U,v)$ is defined by (8).

On the basis of the above results we can say that the functional (10) a positively defined quadratic form.

2^0. In the paper we consider the problem.

Problem $\begin{pmatrix}\sigma\\ I\end{pmatrix}_0^+$. Find a regular solution to equation (1) in D^+ which satisfies the boundary conditions

$$\left[L(\partial y)U(y)\right]^{+}=\left[U_1(y),U_2(y),\left(\frac{\partial U_2}{\partial y_1}-\frac{\partial U_1}{\partial y_2}\right)\right]^{T}=0,\quad y\in S. \qquad (13)$$

Using the Green formula (9) it is easy to prove.

Theorem 2. The problem $\left(\overset{\sigma}{I}\right)_0^+$ has a non-zero solution.

Thus, the problem $\left(\overset{\sigma}{I}\right)_0^+$ has proper number and proper function (proper number represent $\sigma^2>0$).

Finally on the basis formulas (9)-(12) and condition (13) we arrive at the equality

$$\sigma^2=I(U,v)=\frac{\Pi(U,v)}{H(U)}>0. \qquad (14)$$

3^0. Solution of problem $\left(\overset{\sigma}{I}\right)_0^+$.

By the method in (Бицадзе 1976 also Svanadze 2020) we can find a solution of the problem $\left(\overset{\sigma}{I}\right)_0^+$.

Let us now prove the following

Theorem 3. The vector-function $U=(U_1,U_2)^T$ which minimizes the functional (10) is a proper vector-function of problem $\left(\overset{\sigma}{I}\right)_0^+$ if the condition (13) is fulfilled.

Proof. Let minimization $U(x)$ of the functional (10) satisfy condition (15). Let us show that the vector-function $U=(U_1,U_2)^T$ is a solution of the problem $\left(\overset{\sigma}{I}\right)_0^+$.

To this end let us consider the vector-function $U(x)+\varepsilon h(x)$, where ε is an arbitrary real scalar constant, and $h=(h_1,h_2)^T\neq 0$ is an arbitrary regular vector-function in D^+ which satisfies the conditions

$$\left[L(\partial y)h(y)\right]^{+}=\left[h_1(y),h_2(y),\frac{\partial h_2}{\partial y_1}-\frac{\partial h_1}{\partial y_2}\right]^{+}=0,\quad y\in S. \qquad (15)$$

By elementary calculation we get (see (10) and (14))

$$\phi(\varepsilon)=I(U+\varepsilon h,v)=\frac{\Pi(U+\varepsilon h,v)}{H(U+\varepsilon h)}=\frac{\Pi(U,v)+2\varepsilon\Pi(U,h,v)+\varepsilon^2\Pi(h,v)}{H(U)+2\varepsilon H(U,h)+\varepsilon^2 H(h)}\geq\sigma^2, \quad (16)$$

where (see. (6) (8) and (12)

$$\Pi(U,h,v) = \int_{D^+} E(U,h,v)\,dx, \tag{17}$$

$$\Pi(U,h) = \int_{D^+} Uh\,dx. \tag{18}$$

Now note that since $\phi(\varepsilon)$ function at $\varepsilon = 0$ attains minimum, therefore $\Phi'(0) = 0$ and finally we have (see (16))

$$\phi'(0) = 2\frac{\Pi(U,h,v)H(U) - \Pi(U,v)H(U,h)}{H^2(U)} = 0, \quad H(U) \neq 0,$$

owing to (12) and (14) we get

$$\Pi(U,h,v) = \sigma^2 H(U,h). \tag{19}$$

From (5) if $V = h$, by virtue (1), (5), (17), (18) and (19) we obtain

$$\int_{D^+} h(x)\left[A(\partial x,v)U(x) + \sigma^2 U(x)\right]dx = 0, \tag{20}$$

Taking into account the fact that $h(x)$ is an arbitrary regular vector-function in D^+ therefore by (20) we can conclude that the vector-function $U(x)$ is a solution of equation (1) and satisfies condition (13)

Thus, Theorem 3 is valid

Finally note that owing to Theorem 3 and (14) formula we can conclude that if $U(x)$ represent minimizes vector-function of functional $I(U,v)$ (see (10) and (12) then $\sigma^2 = I(U,v) > 0$ is minimal proper number of the problem $\left(\overset{\sigma}{I}\right)_0^+$.