Applied Mathematics

About Iterative Solution Method of Boundary-Contact Problems

David Lekveishvili
david.lekveishvili@atsu.edu.ge
Manana Chumburidze
manana.chumburidze@atsu.edu.ge
Akaki Tsereteli State University
Kutaisi, Georgia

This paper deals with an efficient technique of iterative method of approximate solution of basic boundary-contact problems. The splitting method with convergence analysis is developed. The tools applied in this development are based on singular integral equations, the generalized Schwarz iterative method and Green's functions applications.

Keywords: *approximation solution; boundary-contact problems.*

Introduction. The various fields of modern science including engineering, biomechanics and mathematics industry are oriented on relevant mathematical modeling approach and applications.

The purpose of this work is to develop techniques for dealing with successive approximation that will allow us to solve basic boundary-contact problems (BBCP) (Chumburidze, Lekveishvili 2017, Kupradze, et al. 1983) of partial differential equations (PDEs). Investigation of BBCP is splited by iteration solutions of boundary-value problems for out and in areas.

We provide infinite and finite domains of two-dimensional isotropic inhomogeneous elastic media with inclusion of several elastic materials and mixed contact conditions when stresses components and displacement components are given on the surface of Holder class (Evans 1998). The boundary integral methods in combination with the generalized Schwarz iterative (Tarek Poonithara Abraham Mathew 2008) method and Greens functions applications (Chumburidze, Lekveishvili 2014, Chumburidze 2016, Chumburidze 2014) are applied.

Statement Problem. In this section BBCP theory of elasticity has been considered. R^2 is two-dimensional Euclidean space, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$

points of this space.The static system of PDEs of classical theory of elasticity for two-dimensional isotropic inhomogeneous elastic materials has the form (Chumburidze 2016, Kupradze, et al. 1983):

$$A(\partial x, \mu, \lambda)u(x) = f(x)$$

Where $A(\partial x, \mu, \lambda) = \|A_{ij}(\partial x, \mu, \lambda)\|_{2\times 2}$, - matrix of differential operator.

where $A_{ij}(\partial x, \mu, \lambda) = \delta_{ij}\mu\Delta + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1,2$,

$u = (u_1, u_2)$- is the displacement vector.

Statement problem. It is required to find solution $u(x)$ of BBCP theory of elasticity satisfy the following conditions:

$\forall x \in D_r, r = 1,2$: $\quad A^{(r)}(\partial x)u^{(r)}(x) = f^{(r)}(x)$

$\forall\, y \in S \in L_2(\alpha), \alpha > 0$: $\quad \{u^{(1)}(y)\}^+ = \{u^{(2)}(y)\}^-$

$$\{T^{(1)}(\partial y, n)u^{(1)}(y)\}^+ = \{T^{(2)}(\partial y, n)u^{(2)}(y)\}^-$$

and the radiation conditions in infinite domain.

Where $D_1 = \{x = (x_1, x_2)\epsilon R^2,\ x_1^2 + x_2^2 \le l^2\}$, $D_2 = \{x = (x_1, x_2)\epsilon R^2,\ x_1^2 + x_2^2 \ge l^2\}$,

$S = \{x = (x_1, x_2)\epsilon R^2,\ x_1^2 + x_2^2 = l^2\} \in \Lambda_2(\alpha), \alpha > 0 -$ Lyapunov curve of Holder class (Chumburidze 2016, Evans 1998),

where $l -$ given number. $A^{(r)}(\partial x) = A(\partial x, \mu_r, \lambda_r)$, $T^{(r)}(\partial y, n) = T(\partial y, \mu_r, \lambda_r, n) -$

tensor of stress:

$T(\partial y, \mu, \lambda, n) = \|T_{ij}(\partial y, \mu, \lambda, n)\|_{3\times 3}$,

$$T_{ij}(\partial y, \mu, \lambda, n) = \lambda n_i(y)\frac{\partial}{\partial y_j} + \mu n_j(y)\frac{\partial}{\partial y_i} + \delta_{ij}\mu\frac{\partial}{\partial n(y)}, i, j = 1,2\,;$$

$n(y)$ - is the unit normal vector to the surface S at the point y outward with respect to D_1, $u^{(r)} = (u_1^{(r)}, u_2^{(r)})$- is the displacement vector, μ_r, λ_r are constants of elasticity of D^r domains, $f^{(r)} = (f_1^{(r)}, f_2^{(r)}) \in C^{2,\alpha}(D_r) \cap C^{1,\alpha}(\overline{D_r}), \alpha > 0$- are a given vectors.

Let us consider Koshy's hypotheses (Kupradze, et al. 1983) described in the following conditions:

$$\frac{\mu_2}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\lambda_1}\ \ where\ \mu_1 < \mu_2 \qquad (2)$$

Taking into account (2) the following dependencies are obtaining:

$A^{(1)}(\partial x) = \frac{\mu_1}{\lambda_2}A^{(2)}(\partial x)$, $T^{(1)}(\partial x, n) = \frac{\mu_1}{\lambda_2}T^{(2)}(\partial x, n)$ (3)

Existence and uniqueness solution of (1) problem have been proved in (Chumburidze, Lekveishvili 2017, Kupradze, et al. 1983, Chumburidze 2014).

Solution problem. In this section iterative method to generate a sequence of improving approximate solutions for (1) problem has been used. The iterations are derived from the solve of Neumann's and Dirichlet's problems (*Cheng A.H.D., Cheng D.T. 2005,* Taylor 2011) in the following order:

$\boldsymbol{u}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{2})}$ −solution of Neumann problem (Chumburidze, Lekveishvili 2014, Chumburidze 2014):

$$\boldsymbol{A}^{(\mathbf{2})}(\boldsymbol{\partial x})\boldsymbol{u}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{2})}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^{(\mathbf{2})}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}_{\mathbf{2}} \qquad (6)$$

$$\{T^{(2)}(\partial y, n)u_1^{(2)}(y)\}^- = 0, y \in S$$

$u_2^{(1)}$ −solution of Dirichlet problem [1,7]:

$$A^{(1)}(\partial x)u_2^{(1)}(x) = f^{(1)}(x), x \in D_1 \qquad (7)$$

$$\{u_1^{(1)}(y)\}^+ = \{u_1^{(2)}(y)\}^-, y \in S$$

Let us represent solutions in Greens tensors correspondingly:

$$u_1^{(2)}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\int_{D_2} G^{(2)}(y-x)f^{(2)}(y)dy$$

$$u_1^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}\int_{D_1} G^{(1)}(x,y)f^{(1)}(y)dy + \frac{1}{2}\int_{S_1}\left[T^{(1)}(\partial y, n)G^{(1)}(x,y)\right]^T\left\{u_1^{(2)}(y)\right\}^- d_y s$$

Where $G^{(2)}(y-x)$ and $G^{(1)}(y-x)$ are Green's tensors defined for (6) and (7) problems correspondingly and they are **represented explicitly in terms of the elementary functions** (Chumburidze, Lekveishvili 2014, Kupradze, et al. 1983, Chumburidze 2014). Define vectors u_k (k=1…n) an initial value u_0=0 as an iterative solutions of the following problems correspondingly:

Neumann boundary value problem:

$$A^{(2)}(\partial x)u_{k+1}^{(2)}(x) = f^{(2)}(x), x \in D_2 \qquad (4)$$

$$\{T^{(2)}(\partial y, n)u_{k+1}^{(2)}(y)\}^- = \{T^{(1)}(\partial y, n)u_k^{(1)}(y)\}^+, y \in S$$

Dirichlet boundary value problem:

$$A^{(1)}(\partial x)u_{k+1}^{(1)}(x) = f^{(1)}(x), x \in D_1 \qquad (5)$$

$$\{u_{k+1}^{(1)}(y)\}^+ = \{u_{k+1}^{(2)}(y)\}^-, y \in S$$

Consider the sum:

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k, \quad v_k = u_k - u_{k-1}, k \geq 1 \qquad (8)$$

To investigate this more carefully, the sum of series represented in (8) must be estimated. Are there conditions of convergence of the (8) series? This is the main problem discussed in this section.

It is common to prove the convergence of the (8) series.

Indeed v_1 is solution of the following problems:

Neumann boundary value problem:

$$A^{(2)}(\partial x)v_1^{(2)}(x) = f^{(2)}(x), x \in D_2$$

$$\{T^{(2)}(\partial y, n)v_1^{(2)}(y)\}^- = 0, \quad y \in S \tag{9}$$

Dirichlet boundary value problem:

$$A^{(1)}(\partial x)v_1^{(1)}(x) = f^{(1)}(x), x \in D_1$$

$$\{v_1^{(1)}(y)\}^+ = \{v_1^{(2)}(y)\}^-, y \in S \tag{10}$$

For $k > 1$with respect to v_k we have:

$$A^{(r)}(\partial x)v_k^{(r)}(x) = 0, x \in D_r, r = 1,2$$

and boundary-contact conditions as follows:

$$\left\{v_k^{(1)}(y)\right\}^+ = \left\{u_k^{(1)}(y) - u_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^+ = \left\{u_k^{(1)}(y)\right\}^+ - \left\{u_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^+$$

$$= \left\{u_k^{(2)}(y)\right\}^- - \left\{u_{k-1}^{(2)}(y)\right\}^- =$$

$$=\left\{u_k^{(2)}(y) - u_{k-1}^{(2)}(y)\right\}^- = \left\{v_k^{(2)}(y)\right\}^-, y \in S \tag{11}$$

$$\left\{T^{(2)}(\partial y, n)v_k^{(2)}(y)\right\}^- = \{T^{(2)}(\partial y, n)(u_k^{(2)}(y) - u_{k-1}^{(2)}(y))\}^- =$$

$$\left\{T^{(2)}(\partial y, n)u_k^{(2)}(y)\right\}^- - -\left\{T^{(2)}(\partial y, n)u_{k-1}^{(2)}(y)\right\}^- = \left\{T^{(1)}(\partial y, n)u_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^+ -$$

$$\left\{T^{(1)}(\partial y, n)u_{k-2}^{(1)}(y)\right\}^+ == \{T^{(1)}(\partial y, n)(u_{k-1}^{(1)}(y) - u_{k-2}^{(1)}(y))\}^+ =$$

$$\{T^{(1)}(\partial y, n)v_{k-1}^{(1)}(y)\}^+, y \in S, \tag{12}$$

$v_k^{(r)}(x)(k > 1, r = 1,2)$ can be expressed in Greens tensors $G_r^{(r)}(z, x)$ correspondingly

for domains $D_r, r = 1,2$. Take in account of (11) and (12) the following representation will be obtained:

$$v_k^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}\int \left[T^{(1)}(\partial z, n)G_1^{(1)}(z, x)\right]' \left\{v_k^{(1)}(z)\right\}^+ d_z S =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int \left[T^{(1)}(\partial z, n)G_1^{(1)}(z, x)\right]' \left\{v_k^{(2)}(z)\right\}^- d_z S. x \in D_1 \tag{13}$$

$$v_k^{(2)}(x) = \frac{1}{2}\int G_2^{(2)}(x,y)\left\{T^{(2)}(\partial y,n)v_k^{(2)}(y)\right\}^{-} d_yS =$$
$$= \frac{1}{2}\int G_2^{(2)}(x,y)\left\{T^{(1)}(\partial y,n)v_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^{+} d_yS,$$
$x \in D_2$. (14)

We can evaluate the limit in (14) when $D_2 \ni x \to z \in S$:

$$\left\{v_k^{(2)}(z)\right\}^{-} = \frac{1}{2}\int G_2^{(2)}(z,y)\left\{T^{(1)}(\partial y,n)v_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^{+} d_yS. \quad (15)$$

Take in account (15) then (13) get to the following form:

$$v_k^{(1)}(x) =$$
$$-\frac{1}{4}\int\left[T^{(1)}(\partial z,n)G_1^{(1)}(z,x)\right]'\left[\int G_2^{(2)}(z,y)\left\{T^{(1)}(\partial y,n)v_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^{+} d_yS\right] d_zS=$$
$$= -\frac{1}{4}\int\left[\int\left[T^{(1)}(\partial z,n)G_1^{(1)}(z,x)\right]' G_2^{(2)}(z,y)d_zS\right]\left\{T^{(1)}(\partial y,n)v_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^{+} d_yS$$

Using the symmetry properties of Green tensors (Kupradze, et al. 1983, Chumburidze 2014) the $G_2^{(2)}(z,x)$ function by $G_2^{(1)}(z,x)$ function has been instead:

$$\int\left[T^{(1)}(\partial z,n)G_1^{(1)}(z,x)\right]' G_2^{(2)}(z,y)\, d_zS = G_2^{(2)}(x,y) = -G_2^{(1)}$$

Where $x^*(x_1^*,x_2^*) \in D_1$ point is symmetry to $x = (x_1,x_2) \in D_2$ with respect to $S-$ circle, $G_2^{(1)}(z,x) -$ Second tensor of Green for D_1 domain, $G_2^{(2)}(z,x) -$second tensor of Green for D_2 domain.

Therefore, following result will be obtained:

$$v_k^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\int G_2^{(1)}(x^*,y)\left\{T^{(1)}(\partial y,n)v_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^{+} d_yS = \frac{\mu_1}{\mu_2}v_{k-1}^{(1)}(x^*) \quad (16)$$

Let us take the limits in (16):

$$\lim_{D_2\ni x\to z\in S} v_k^{(1)}(x) = v_k^{(1)}(z); \quad \lim_{D_1\ni x^*\to z\in S} v_{k-1}^{(1)}(x^*) = v_{k-1}^{(1)}(z)$$

Which means convergence of the (8) series on the S- boundary.

Therefor advantages of Dirichlet problem verify convergence of the (8) series everywhere on the region of R^2.

Conclusion. Thus, in article a new method to construct of approximate solutions has been verified.

Convergence series of iterative solutions of BCPTE by using splitting method have been proved. Schwarz series analysis of infinite and finite domains including several elastic materials have been presented. Justification that Green's tensors can be used to improve the efficiency and accuracy in computing the numerical solutions in assumptions that surfaces of materials are sufficiently smooth has been proposed. As a result, it is shown that the approximate method is reliable for obtaining effective solutions (explicitly) of boundary-contact problems. This method can be used for mixed boundary-contact problems of statics and oscillation theory in the case of inhomogeneous and isotropic bodies.

References

Chumburidze, M., & Lekveishvili, D. 2014. "Approximate Solution of Some Mixed Boundary Value Problems of the Generalized Theory of Couple-Stress Thermo-Elasticity". *World Academy of Science, engineering and Technology,* 6(28), 2014: 161-163.

Chumburidze, M., & Lekveishvili, D. 2017. August. "Numerical approximation of basic boundary-contact problems". *In ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference* (pp. V009T07A021-V009T07A021). American Society of Mechanical Engineers.

Chumburidze, Manana. 2016. "Approximate Solution of Some Boundary Value Problems of Coupled Thermo-Elasticity." *Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering.* Springer, Cham, 2016: 71-80.

Chumburidze, M. 2014. *Non-classical models of the some theory of boundary value problems.* Saarbrcken, Germany.

Cheng, A.H.D. Cheng, D.T. 2005. "Heritage and early history of the boundary element method". Engineering Analysis with Boundary Elements. 29 (3), 2005:268. doi:10.1016/j.enganabound.2004.12.001.

Kupradze, V. et al. 1983. *Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermo Elasticity.* North-Holland, Amsterdam-New York.

Lawrence, C. Evans. *1998. Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence.*

Tarek, Poonithara, Abraham, Mathew. 2008. *Domain Decomposition Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations.* Springer.

Taylor, Michael E. *2011. "Partial differential equations I. Basic theory". Applied Mathematical Sciences, vol. 115 (2nd ed.), 2011. Springer,*

The article is financed from the grant project of Akaki Tsereteli State University.

გამოყენებითი მათემატიკა

სასაზღვრო-კონტაქტური ამოცანის ამოხსნის იტერაციული მეთოდის შესახებ

დავით ლეკვეიშვილი
david.lekveishvili@atsu.edu.ge
მანანა ჭუმბურიძე
manana.chumburidze@atsu.edu.ge
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო

სტატიაში განხილულია მიახლოებითი ამოხსნების აგების იტერაციული მეთოდი გრინის ტენზორების გამოყენებით. დასაბუთებულია რომ გრინის ტენზორი შეიძლება გამოყენებულ იქნას ამოცანის ამონახსნის რაგინდ ზუსტ რაოდენობრივ შეფასებათა აპროქსიმაციის მისაღებად. კვლევის ობიექტს წარმოადგენს ძირითადი საკონტაქტო ამოცანები. კვლევა ეფუძნება ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდს, გრინის ტენზორებისა და პოტენციალთა მეთოდებს.

საკვანძო სიტყვები. *მიახლოებითი ამოხსნები; გრინის ტენზორი; საკონტაქტო ამოცანები.*

შესავალი. უახლესი ტექნოლოგიური მიღწევები ცხადყოფენ, რომ მეცნიერების სხვადასხვა მიმართულების დარგებში, მათ შორის ინჟინერიაში, მექანიკასა და მათემატიკურ ინდუსტრიაში უმთავრეს პრობლემას წარმოადგენს ამოცანების მოდელირებისა და მათი გადაწყვეტის ეფექტური ალგორითმების შემუშავების მეთოდები. არსებობს მიახლოებითი ამოხსნების აგების სხვადასვა აპროქსიმაციები, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ამონახსნის აგების სტრატეგიებითა და სიზუსტით. აქტუალურია ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის ეფექტური ალგორითმების აგება, რაც პირდაპირ კავშირშია ამონახსნის სტრუქტურის სიმარტივესთან.

ნაშრომის მთავარ მიზანს წარმოადგენს აპროქსიმაციის ალგორითმების განზოგადებული მეთოდების კვლევა და ახალი ეფექტური მოდიფიკაციების შემოთავაზება გრინის ტენზორების გამოყენებით. კვლევის ობიექტს წარმოადგენს დრეკადობის თეორიის ორგანზომილებიანი სასაზღვრო-კონტაქტური ამოცანების მოდელები

ცენტრ-სიმეტრიანი არაერთგვაროვანი იზოტროპული წრიული არეებისათვის კოშის ჰიპოთეზის პირობებში.

ამოცანის ფორმულირება. ავაგოთ ძირითადი სასაზღვრო-კონტაქტური ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნები დრეკადობის თეორიის კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგი სტატიკური სისტემებისათვის:

$$\forall x \in \mathrm{D_r}, \mathrm{r}=1,2: \qquad A^{(r)}(\partial x)u^{(r)}(x) = f^{(r)}(x)$$
$$\forall\, y \in S \in \mathrm{L_2}(\alpha), \alpha > 0: \quad \{u^{(1)}(y)\}^{+} = \{u^{(2)}(y)\}^{-}$$
$$\{T^{(1)}(\partial y, n)u^{(1)}(y)\}^{+} = \{T^{(2)}(\partial y, n)u^{(2)}(y)\ \}^{-}$$

და გამოსხივების პირობებით უსასრულობაში.

სადაც, $D_1 = \{x = (x_1, x_2)\epsilon R^2,\ x_1^2 + x_2^2 \le l^2\}, \quad D_2 = \{x = (x_1, x_2)\epsilon R^2,\ x_1^2 + x_2^2 \ge l^2\}$,

$S = \{x = (x_1, x_2)\epsilon R^2,\ x_1^2 + x_2^2 = l^2\} \in \Lambda_2(\alpha), \alpha > 0 -$ლიაპუნოვის წირი ჰოლდერის კლასის, სადაც $l -$ მოცემული რიცხვია. $A^{(r)}(\partial x) = A(\partial x, \mu_r, \lambda_r)$,

$A(\partial x, \mu, \lambda) = \left\|A_{ij}(\partial x, \mu, \lambda)\right\|_{2\times2}, \quad A_{ij}(\partial x, \mu, \lambda) = \delta_{ij}\mu\Delta + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \ \ i, j = 1,2;$

$\Lambda_2(\alpha), \alpha > 0$,

$T^{(r)}(\partial y, n) = T(\partial y, \mu_r, \lambda_r, n) -$ ძაბვის ტენზორი, $T(\partial y, \mu, \lambda, n) = \left\|T_{ij}(\partial y, \mu, \lambda, n)\right\|_{3\times3}$,

$T_{ij}(\partial y, \mu, \lambda, n) = \lambda n_i(y)\frac{\partial}{\partial y_j} + \mu n_j(y)\frac{\partial}{\partial y_i} + \delta_{ij}\mu\frac{\partial}{\partial n(y)}, i, j = 1,2\,;$ $\quad n(y)$ - გარე ერთეულოვანი ნორმალია S ზედაპირისადმი y წერტილში, $u^{(r)} = (u_1^{(r)}, u_2^{(r)})$- გადაადგილების ვექტორი, $\mu_r, \lambda_r -$ დრეკადობის მუდმივები, $f^{(r)} = (f_1^{(r)}, f_2^{(r)}) \in C^{2,\alpha}(\,D_r) \cap C^{1,\alpha}(\overline{D_r}), \alpha > 0$- მოცემული ვექტორ-ფუნქციები.

ნებისმიერი $\varphi(x)$ ფუნქციის შეზღუდვა $\mathrm{D_r}$ არეზე აღვნიშნოთ $\varphi^{(r)}(x)$-ით.

კოშის ჰიპოთეზის პირობებში:

$$\frac{\mu_2}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\lambda_1} \text{ სადაც}, \qquad \mu_1 < \mu_2$$

გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

$$L^1(\partial x) = \frac{\mu_1}{\lambda_2}L^{(2)}(\partial x), \ \ T^{(1)}(\partial x, n) = \frac{\mu_1}{\lambda_2}T^{(2)}(\partial x, n)$$

როგორც ცნობილია ამ ამოცანას, გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. ვიპოვოთ ის მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით.

ამონახსნის აგება. ნულოვან მიახლოებად ავიღოთ u_0=0 ფუნქცია. ვთქვათ მიმდევრობის $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_k$ წევრები უკვე აგებულია. ამ მიმდევრობის შემდეგი წევრი განვსაზღვროთ როგორც ამონახსნი შემდეგი ამოცანებისა:

ნეიმანის ამოცანა:

$$A^{(2)}(\partial x)u_{k+1}^{(2)}(x) = f^{(2)}(x), x \in D_2$$

$$\{T^{(2)}(\partial y,n)u_{k+1}^{(2)}(y)\}^{-}=\{T^{(1)}(\partial y,n)u_{k}^{(1)}(y)\}^{+},y\in S$$

დირიხლეს ამოცანა:

$$A^{(1)}(\partial x)u_{k+1}^{(1)}(x)=f^{(1)}(x),x\in D_1$$
$$\{u_{k+1}^{(1)}(y)\}^{+}=\{u_{k+1}^{(2)}(y)\}^{-},y\in S$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ სახით აგებული მიმდევრობა კრებადია და მისი ზღვარი u დასმული ამოცანის ამონახსნია.

განვიხილოთ მწკრივი:

$$\sum_{k=1}^{\infty}v_k,$$

სადაც $v_k=u_k-u_{k-1},k\geq 1$. ცხადია,v_1 წარმოადგენს შემდეგი ამოცანების ამონახსნს

ნეიმანის ამოცანა:

$$A^{(2)}(\partial x)v_1^{(2)}(x)=f^{(2)}(x),x\in D_2$$
$$\{T^{(2)}(\partial y,n)v_1^{(2)}(y)\}^{-}=0,y\in S$$

დირიხლეს ამოცანა:

$$A^{(1)}(\partial x)v_1^{(1)}(x)=f^{(1)}(x),x\in D_1$$
$$\{v_1^{(1)}(y)\}^{+}=\{v_1^{(2)}(y)\}^{-},y\in S$$

ხოლოv_k, როცა $k>1$ აკმაყოფილებს ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას

$$A^{(r)}(\partial x)v_k^{(r)}(x)=0,x\in D_r,r=1,2$$

და საკონტაქტო პირობებს

$$\left\{v_k^{(1)}(y)\right\}^{+}=\left\{u_k^{(1)}(y)-u_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^{+}=\left\{u_k^{(1)}(y)\right\}^{+}-\left\{u_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^{+}$$
$$=\left\{u_k^{(2)}(y)\right\}^{-}-\left\{u_{k-1}^{(2)}(y)\right\}^{-}=$$
$$=\left\{u_k^{(2)}(y)-u_{k-1}^{(2)}(y)\right\}^{-}=\left\{v_k^{(2)}(y)\right\}^{-},y\in S$$

$$\left\{T^{(2)}(\partial y,n)v_k^{(2)}(y)\right\}^{-}=\{T^{(2)}(\partial y,n)(u_k^{(2)}(y)-u_{k-1}^{(2)}(y))\}^{-}=$$
$$=\left\{T^{(2)}(\partial y,n)u_k^{(2)}(y)\right\}^{-}-\left\{T^{(2)}(\partial y,n)u_{k-1}^{(2)}(y)\right\}^{-}=$$
$$=\left\{T^{(1)}(\partial y,n)u_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^{+}-\left\{T^{(1)}(\partial y,n)u_{k-2}^{(1)}(y)\right\}^{+}=$$
$$=\{T^{(1)}(\partial y,n)(u_{k-1}^{(1)}(y)-u_{k-2}^{(1)}(y))\}^{+}=\{T^{(1)}(\partial y,n)v_{k-1}^{(1)}(y)\}^{+},y\in S,$$

ვთქვათ k>1. როგორც ცნობილია,

$$v_k^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}\int_S \left[T^{(1)}(\partial z, n)G_1^{(1)}(z,x)\right]' \left\{v_k^{(1)}(z)\right\}^+ d_zS =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_S \left[T^{(1)}(\partial z, n)G_1^{(1)}(z,x)\right]' \left\{v_k^{(2)}(z)\right\}^- d_zS. x \in D_1$$

თავის მხრივ,

$$v_k^{(2)}(x) = \frac{1}{2}\int_S G_2^{(2)}(x,y)\left\{T^{(2)}(\partial y, n)v_k^{(2)}(y)\right\}^- d_yS$$

$$= \frac{1}{2}\int_S G_2^{(2)}(x,y)\left\{T^{(1)}(\partial y, n)v_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^+ d_yS,$$

$$x \in D_2.$$

სადაც, $G_1^{(1)}(z,x)$ გრინის პირველი ტენზორია D_1 - შიგა არესათვის[], ხოლო $G_2^{(2)}(x,y)$ - გრინის მეორე ტენზორი D_2 გარე არესათვის.
უკანასკნელ ტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე როცა $D_2 \ni x \to z \in S$, მივიღებთ

$$\left\{v_k^{(2)}(z)\right\}^- = \frac{1}{2}\int_S G_2^{(2)}(z,y)\left\{T^{(1)}(\partial y, n)v_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^+ d_yS.$$

რომლის გათვალისწინებით მივიღებთ,

$$v_k^{(1)}(x)$$
$$= -\frac{1}{4}\int_S \left[T^{(1)}(\partial z, n)G_1^{(1)}(z,x)\right]' \left[\int_S G_2^{(2)}(z,y)\left\{T^{(1)}(\partial y, n)v_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^+ d_yS\right] d_zS$$
$$= -\frac{1}{4}\int_S \left[\int_S \left[T^{(1)}(\partial z, n)G_1^{(1)}(z,x)\right]' G_2^{(2)}(z,y)\, d_zS\right] \left\{T^{(1)}(\partial y, n)v_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^+ d_yS$$

გრინის მეორე ტენზორის სიმეტრიულობა წრეწირის მიმართ გვაძლევს შესაძლებლობას გრინის მეორე ტენზორი გარე არისათვის შევცვალოთ გრინის მეორე ტენზორით შიგა არისათვის:

$$\int_S \left[T^{(1)}(\partial z, n)G_1^{(1)}(z,x)\right]' G_2^{(2)}(z,y)\, d_zS = G_2^{(2)}(x,y) = -G_2^{(1)}(x^*,y)$$

სადაც $G_2^{(1)}(x^*,y)$ გრინის მეორე ტენზორია D_1 - შიგა არესათვის,$x^*(x_1^*,x_2^*) \in D_1$ არის $x = (x_1, x_2) \in D_2$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $S -$ წრეწირის მიმართ.

მაშინ საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$v_k^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\int_S G_2^{(1)}(x^*, y)\left\{T^{(1)}(\partial y, n)v_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^+ d_y S = \frac{\mu_1}{\mu_2} v_{k-1}^{(1)}(x)$$

აქ უნდა გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც x მიისწრაფვის სასაზღვრო z წერტილისაკენ, მაშინ x^*-იც მიისწრაფვის იმავე z-ისკენ. მიიღება კრებადი მწკრივი წრეწირზე და რადგანაც დირიხლეს ამოცანა კორექტული ამოცანაა, მწკრივი კრებადია მთელ სიბრტყეზე.

დასკვნა. ამრიგად, ნაშრომში დასაბუთებულია მიახლოებითი ამონახსნების აგების ახალი მეთოდი გრინის ტენზორებისა და განზოგადებულ მწკრივთა თეორიის გამოყენებით, ორგანზომილებიანი კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სტატიკური მოდელებისთვის სასაზღვრო--კონტაქტური ამოცანებისათვის. ეს მეთოდები შეიძლება განზოგადებულ იქნას სხვა მოდელების შემთხვევაშიც.

სტატია იბეჭდება აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გრანტის ფარგლებში.