ანალიზი

მახლობელ არეთა კვაზიკონფორმული ასახვების სასაზღვრო შეფასებების შესახებ

ლელა ზივზივაძე-ჯაფარიძე,
lela.japaridze@atsu.edu.ge
ერეკლე ჯაფარიძე
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო

აღნიშნული სტატია წარმოადგენს ავტორთა ნაშრომის ზივზივაძე, ჯაფარიძე 2022 გაგრძელებას. მასში სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების მეთოდების გამოყენებით განიხილება მახლობელ არეთა კვაზიკონფორმული ასახვები ერთეულოვან წრეზე და დადგენილია შეფასებები რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ ვიმსჯელოთ სხვადასხვა სიდიდეების სიახლოვის შესახებ ε *–ის საშუალებით, სადაც* $\varepsilon > 0$ *- ნამდვილი პარამეტრია რომელიც ახასიათებს არეთა სიახლოვეს. კერძოდ,* ε *–ის საშუალებით შეფასებულია მახლობელი არეების შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალების სხვაობის რიგი და ასევე გადამსახავი ფუნქციების სასაზღვრო მნიშვნელობათა და მათი წარმოებულების სხვაობები.*

საკვანძო სიტყვები: *ბელტრამის განტოლებათა სისტემა, მახლობელი არეები, კომპლექსური სიბრტყის ჰომეომორფიზმი, კვაზიკონფორმული ასახვა.*

შესავალი. მახლობელ არეთა კონფორმულ და კვაზიკონფორმულ ასახვებთან დაკავშირებული ამოცანები საკმაოდ აქტუალურია და გააჩნიათ მრავალრიცხოვანი გამოყენებები. პრაქტიკული ხასიათის მრავალი ამოცანის ამოხნის დროს ხშირად ვხვდებით ფუნქციებს რომლებიც განახორციელებენ არეთა კონფორმულ და კვაზიკონფორმულ ასახვებს ისე, რომ აღნიშნულ არეში ეს ფუნქციები აკმაყოფილებენ რომელიმე ელიფსურ განტოლებათა სისტემებს.ამიტომ მიზანშეწონილია ვიცოდეთ ასეთი ფუნქციების მიახლოებით და ეფექტურად აგების მეთოდები რომლებიც გადმოცემულია შრომებში (Вертгеим 1960, Фоминих 1974).

ბევრ ამოცანაში მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ თუ როგორ აისახება მოცემული არის საზღვრის მცირედი დეფორმაცია გადამსახავი ფუნქციის ფორმაზე როგორ იცვლება ამ დროს მისი კონსტრუქცია როგორც არეში ასევე არის საზღვარზე.

მნიშვნელოვანი შედეგები ამ მიმართულებით მიღებულია შრომებში (Лаврентьев 1947, Samsonia, Samkharadze 1999).

აღვნიშნოთ, რომ ასეთი ტიპის ამოცანები იმ შემთხვევისათვის როცა როგორც გამოსავალი ასევე მახლობელი არეები წარმოადგენენ ვარსკვლვისებურ არეებს $z=0$ წერტილის მიმართ განხილულია ავტორთა შრომებში (Zivzivadze, Japaridze 2005) და (Zivzivadze, Japaridze 2006).

ძირითადი ცნებები და აღნიშვნები. კომპლექურ $\mathbb{C}$, $z=x+iy$ სიბრტყეში განვიხილოთ ცალადბმული $G,\ \ 0\in G$ არე შემოსაზღვრული ჩაკეტილი გლუვი Γ კონტურით რომლის პარამეტრული განტოლებებია:

$$t=t(\tau)=x(\tau)+iy(\tau),\qquad 0\le\tau\le 2\pi,\qquad t(0)=t(2\pi)$$

(2.1)

τ პარამეტრის ზრდას შეესაბამება $t=t(\tau)$ წერტილის მოძრაობა რომლის დროსაც Γ წირით შემოსაზღვრული არე რჩება ხელმარცხნივ. მასთან $x(\tau)$ და $y(\tau)$, 2π –პერიოდული ფუნქციებია.

ვიტყვით, რომ Γ წირი რომელიც მოცემულია (2.1) განტოლებით, ეკუთვნის $C_{\alpha}^{'}$ კლასს, თუ $f(z)$ ფუნქცია $\overline{G}$ არეში აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას $\alpha,\ \ 0<\alpha\le 1$ მაჩვენებლით, და ჩავწერთ, რომ $f\in C_{\alpha}(\overline{G})$.

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ არეთა კონკრეტულ ოჯახებს რომლებიც გარკვეული აზრით მახლობელი არიან მოცემულ არეებთან.

განსაზღვრა: (Samsonia, Samkharadze 1999) დავუშვათ, ცალადბმული $G,\ \ 0\in G$ არე შემოსაზღვრულია $\Gamma\in C_{\alpha}^{'},\ \ 0<\alpha\le 1$ წირით და $\mathbb{C}$ სიბრტყეზე განვიხილოთ სხვა ცალადბმული $\tilde{G}$ არე, $\tilde{\Gamma}$ საზღვრით რომლის განტოლებაა

$$\tilde{t}=\tilde{t}(\tau)=\tilde{x}(\tau)+i\,\tilde{y}(\tau),\qquad 0\le\tau\le 2\pi,\qquad \tilde{t}(0)=\tilde{t}(2\pi)$$

და $\tilde{\Gamma}\in C_{\alpha}^{'}$. $\tilde{G}$ არეს ეწოდება G არის ε –მახლობელი $(0<\varepsilon<1)$ არე, თუ შესრულებულია პირობები:

$$|t(\tau)-\tilde{t}(\tau)|\le\varepsilon,\qquad \tau\in[0,2\pi],\qquad \|t'-\tilde{t}'\|_{C_\alpha}\le\varepsilon,\quad 0<\alpha\le 1 \tag{2.2.}$$

ნებისმიერი $\varepsilon\in(0,1)$ რიცხვისათვის მოგვეცემა G არის ε –მახლობელი არეების უსასრულო სიმრავლე რომელც $\Omega(G,\varepsilon)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ვთქვათ, G_0 ცალადბმული არეა $\mathbb{C}$ სიბრტყეზე ისეთი, რომ $\partial G_0=\Gamma_0\in C'_\alpha \quad (0<\alpha\le 1)$, $G\subset G_0$ და ნებისმიერი $\tilde{G}\in\Omega(G;\varepsilon)$, მახლობელი არისათვის $\tilde{G}\subset G_0$.

კომპლექსურ $\mathbb{C}$ სიბრტყეში განვიხილოთ ბელტრამის განტოლებათა სისტემა კომპლექსური ფორმით

$$\omega_{\bar z}=q(z)\omega_z \tag{2.3.}$$

იმ დაშვებით,რომ $|q(z)|\le Q_0<1,\qquad q\in C'_\gamma\left(\overline{G_0}\right),\qquad 0<\gamma\le 1$ როცა, $z\in\overline{G_0}$ და $q(z)=0$ როცა, $z\in\mathbb{C}\setminus\overline{G_0}$, სადაც

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}-i\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\qquad \omega_{\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}+i\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)$$

დავუშვათ W წარმოადგენს (2,3) სისტემის ამონახსნს რომელსაც კომპლექსური $\mathbb{C}$ სიბრტყის გლობალური ჰომეომორფიზმი უწოდოთ. იგი აიგება ი. ნ. ვეკუას (Vekua 1988: თ.2) სქემის მიხედვით და განახორციელებს კომპლექსური $\mathbb{C}$ სიბრტყის თავის თავზე ჰომეომორფიზმს მასთან $W(0)=0,\quad W(\infty)=\infty,\quad z^{-1}W(z)\to 1$ როცა $|z|\to\infty$ და თანახმად (Manjavidze 1967)–ისა

$$W,\quad W_z,W_{\bar z}\in C_{\gamma_0}\left(\overline{G_0}\right)\ \text{სადაც}\ 0<\gamma_0<\min\{\alpha,\gamma\}. \tag{2.4}$$

$W(z)$ ჰომეომორფიზმი ცნობილია (2.3) განტოლებათა სისტემის ძირითადი ჰომეომორფიზმის სახელწოდებით.

კოშის ტიპის ინტეგრალი $\mu\in C_\alpha[0,2\pi], 0<\alpha\le 1$, სიმკვრივით Γ წირის გასწვრივ და მისი შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალი $t(\tau)\in\Gamma$ წერტილში აღინიშნებიან ასე:

$$K_{\Gamma}(\mu,z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(t)dt}{t-z}(z\in$$ [redacted] $$(\mu,t)=S_{\Gamma}(\mu,t(\tau))=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu[t(\sigma)]-\mu[t(\tau)]}{t(\sigma)-t(\tau)}dt(\sigma)=\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_{\eta}}\frac{\mu[t(\sigma)]-\mu[t(\tau)]}{t(\sigma)-t(\tau)}dt(\sigma)\quad \sigma\in[0,2\pi]$$

სადაც $\Gamma_{\eta}=\{z:|z-t(\tau)|<\eta\}\bigcap\Gamma$ აღნიშნავს Γ წირის ნაწილს რომელიც მოქცეულია $|z-t(\tau)|<\eta$ წრის შიგნით.

თუ $\mu\in C'_{\alpha}\left[0,2\pi\right]$, $0<\alpha\leq 1$ მაშინ (იხ.Гахов 1963: 49)

$$\frac{dS_{\Gamma}\left(\mu,t\left(\tau\right)\right)}{dt\left(\tau\right)}=S_{\Gamma}\left(\mu'_{t},t\left(\tau\right)\right). \qquad (2.5)$$

თუ Γ მოცემული გლუვი ჩაკეტილი წირია,არსებობს რიცხვი R_{Γ} (იხ. Мусхелишвили 1982: 13), რომელიც არ არის დამოკიდებული Γ წირის წერტილებზე ისე, რომ ნებისმიერი $t=t\left(\tau\right)\in\Gamma$, $0\leq\tau\leq 2\pi$ წერტილისათვის ნებისმიერი წრეწირი რადიუსით $r\leq R_{\Gamma}$ და ცენტრით $t\left(\tau\right)$ წერტილში, Γ წირს კვეთს მხოლოდ ორ წერტილში. R_{Γ}–ს ეწოდება სტანდარტული რადიუსი.წრეს $\{z:|z-t|<R_{\Gamma}\}$, $t\in\Gamma$ რომელიც Γ წირს კვეთს ერთადეთ $l\left(t\right)=\{z:|z-t|<R_{\Gamma}\}\bigcap\Gamma$ რკალზე, სტანდარტული წრე ეწოდება, ხოლო $l\left(t\right)$ რკალს სტანდარტული რკალი ცენტრით $t\in\Gamma$ წერტილში.

როგორც ცნობილია (იხ. Мусхелишвили 1982: 523-525), თუ Γ გლუვი ჩაკეტილი წირია,მაშინ ნებისმიერი $t_1,t_2\in\Gamma$ წერტილებისათვის გვაქვს

$$|t_1-t_2|\geq k_0 s\left(t_1,t_2\right) \qquad (2.6)$$

სადაც $s\left(t_1,t_2\right)$ არის Γ წირის იმ უმცირესი რკალის სიგრძე რომლის ბოლოებია t_1 და t_2 ხოლო k_0, $0<k_0<1$ დადებითი მუდმივია, რომელიც არ არის დამოკიდებული Γ წირზე t_1 და t_2 წერტილების განლაგებაზე. აღვნიშნოთ ასევე ისიც, რომ ნებისმიერი $t\in\Gamma$ წერტილისათვის $l\left(t\right)$ სტანდარტული რკალის სიგრძე ნაკლებია რიცხვზე $\frac{1}{2}|\Gamma|$, სადაც $|\Gamma|$ აღნიშნავს Γ წირის სიგრძეს(იხ. Мусхелишвили 1982: 523-525).

ამ პუნქტის ბოლოს შევთანხმდეთ და შემდგომ მსჯელობებში ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha,\gamma\in(0,1]$, ხოლო M მუდმივი, რომელიც მაგალითად

დამოკიდებულია G არეზე, W ჰომომორფიზმზე და ჰელდერის α მაჩვენებელზე და არ არის დამოკიდებული ε –ზე,სადაც $\varepsilon > 0$ ნამდვილი პარამეტრია რომელიც ახასიათებს არეების სიახლოვეს, აღინიშნება, ასე $M = M(G,W,\alpha)$.

ზოგიერთი ცნობები ასახვათა თეორიიდან. მოვიყვანოთ ცნობილი შედეგები ასახვათა თეორიიდან და, ასევე, ზოგიერთი დამხმარე ფორმულები და წინადადებები, რომლებიც გამოიყენებიან შემდგომ მსჯელობებსა და დამტკიცებებში.

ვიტყვით, რომ კომპლექსური $\omega = f(z)$ ფუნქცია განახორციელებს ცალადბმული G არის ერთეულოვან $|\omega|<1$ წრეზე (2.3) სისტემის შესაბამის კვაზიკონფორმულ ასახვას თუ ω ჰომომორფულად ასახავს G არეს $|\omega|<1$ წრეზე და აკმაყოფილებს (2.3) პირობას.

ნაშრომში (Kveselava, Samsonia 1980) დამუშავებულია ბელტრამის (2.3) სისტემის შესაბამისი ცალადბმული და მრავლადბმული არეების კვაზიკონფორმული ასახვების აგების კონსტრუქციული მეთოდები. ასეთ კონსტრუქციებში საკვანძო როლს თამაშობს (2.3) სისტემის W ჰომეომორფიზმი. ასეთი ასახვების გაცნობის მიზნით დავიწყოთ იმით, რომ, (Kveselava, Samsonia 1980)-ის თანახმად, შემდეგი ინტეგრალით წარმოდგენადი ფუნქცია

$$K_\Gamma(\varphi,W,z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dW(t)}{W(t)-W(z)} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma) \qquad (3.1.)$$

სადაც $dW(t) = W_t dt + W_{\bar{t}} d\bar{t}$ ხოლო $\varphi(t)$ ჰელდერის აზრით უწყვეტი ფუნქციაა, წარმოადგენ (2.3) სისტემის ამონახსნს G არეში, ხოლოა $\mathbb{C} \setminus \bar{G}$ არეში კი ჰოლომორფულ ფუნქციას, მასთან $K_\Gamma(\varphi,W,\infty) = 0$.

(3.1) ინტეგრალს შეიძლება მივცეთ აზრი იმ შემთხვევაშიც, როცა წერტილი მდებარეობს Γ წირზე.დაუშვათ

$$s = s(\tau) = W[t(\tau)], \qquad 0 \le \tau \le 2\pi, \qquad s(0) = s(2\pi)$$
$$\tilde{s} = \tilde{s}(\tau) = W[\tilde{t}(\tau)], \qquad 0 \le \tau \le 2\pi, \qquad \tilde{s}(0) = \tilde{s}(2\pi) \qquad (3.2)$$

წარმოადგენენ $L = W(\Gamma)$ და $\tilde{L} = W(\tilde{\Gamma})$ წირების განტოლებებს შესაბამისად.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყოველ $t \in \Gamma$ წერტილში W გარდაქმნის იაკობიანი განსხვავდება ნულისაგან $J = |W_t|^2 - |W_{\bar{t}}|^2 > 0$ (იხ.Vekua 1988:

81), მაშინ $s'(\tau)=W_t t'(\tau)+W_{\bar{t}}\bar{t}'(\tau)$ ტოლობიდან და (2.4) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ Γ –ს სახე W ასახვისას ისევ $C'_{\gamma 0}$ კლასის წირია, ანუ

$$s,\tilde{s}\in C'_{\gamma 0}[0,2\pi], \qquad (3.3)$$

სადაც γ_0 (2.4) პირობაში მონაწილე მუდმივია $0<\gamma_0<\min\{\alpha,\gamma\}$.

დაუშვათ $z\bar{\in}\Gamma$, მაშინ $W(z)\bar{\in} L$ და (3.1)–დან ვღებულობთ

$$K_\Gamma(\varphi,W,z)=K_L(h;W(z)), \qquad (3.4)$$

სადაც

$$h(s)=h[s(\tau)]=\left(\varphi\cdot W^{-1}\right)[s(\tau)]=\varphi[t(\tau)] \quad \tau\in[0,2\pi], \qquad (3.4')$$

ხოლო $K_L(h;W(z))$ ინტეგრალი არის კოშის ტიპის ინტეგრალი h სიმკვრივით L წირის გასწვრივ. ამიტომ (3.1) ფუნქციას შემდგომში გამოვიყენებთ კოშის ტიპის ინტეგრალის ანალოგად ბელტრამის სისტემისათვის.

ფიქსირებული $t(\tau)\in\Gamma$ წერტილისათვის განვიხილოთ სიმრავლეები

$$\Gamma_\delta(t)=\{t(\sigma)\in\Gamma;\quad 0\le\sigma\le\tau-\delta \text{ или } \tau+\delta\le\sigma<2\pi\}$$

при $t\ne t(0)$ (3.5)

და

$$\Gamma_\delta(0)=\{t(\sigma)\in\Gamma;\quad \delta\le\sigma\le 2\pi-\delta\} \quad \text{при } t=t(0)=t(2\pi) \qquad (3.5')$$

სადაც $0<\delta\le\min\{\tau,2\pi-\tau\}$. W ასახვის ჰომეომორფულობის გამო ნებისმიერი $t(\tau)\in\Gamma$ წერტილისათვის გვექნება $W[\Gamma_\delta(t)]=L_\delta[W(t)]=L_\delta(s)$.ვინაიდან L გლუვი წირია და h უწყვეტია ჰელდერის აზრით L წირზე ამიტომ ნებისმიერ $s=s(\tau)\in L,\quad 0\le\tau\le 2\pi$ წერტილში არსებობს სინგულარული ინტეგრალი $S_L(h,s)$ სადაც h (3.4') ფორმულით განსაზღვრული ფუნქციაა და მარტივად ვაჩვენებთ, რომ ეს ინტეგრალი ემთხვევა ზღვარს

$$S_L(h;s)=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\pi i}\int_{L_\delta(s)}\frac{h[s(\sigma)]-h[s(\tau)]}{s(\sigma)-s(\tau)}ds(\sigma)$$

მაშინ ტოლობიდან

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\delta}(t)}\frac{\varphi[t(\sigma)]-\varphi[t(\tau)]}{W[t(\sigma)]-W[t(\tau)]}\,dW[t(\sigma)]=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_{\delta}(s)}\frac{h[s(\sigma)]-h[s(\tau)]}{s(\sigma)-s(\tau)}\,ds(\sigma),$$

$(s=W(t))$

გამომდინარეობს, რომ Γ წირის ყოველ $t=t(\tau)$ წერტილში არსებობს (3.1) სისტსმის შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალი

$$S_{\Gamma}(\varphi,W,t)=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\delta}(t)}\frac{\varphi[t(\sigma)]-\varphi[t(\tau)]}{W[t(\sigma)]-W[t(\tau)]}\,dW[t(\sigma)]=S_{L}(h,s)$$

(3.6)

და ადგილი აქვს ფორმულებს:

$$K_{\Gamma}^{+}(\varphi,W,t)=\lim_{z\to t}K_{\Gamma}(\varphi,W,z)=2\varphi(t)+S_{\Gamma}(\varphi,W,t),\qquad (z\in G)$$
$$K_{\Gamma}^{-}(\varphi,W,t)=\lim_{z\to t}K_{\Gamma}(\varphi,W,z)=S_{\Gamma}(\varphi,W,t),\qquad \left(z\in \mathbb{C}\setminus\overline{G}\right)\qquad (3.7)$$

როგორც აღინიშა, ნაშრომში (Kveselava, Samsonia 1980) აგებულია ფუნქცია, რომელიც კვაზიკონფორმულად ასახავს ცალადბმულ G $(0\in G)$ არეს ერთეულოვან წრეზე. ასეთი ფუნქციის აგება ხორციელდება იმ დაშვებით, რომ ბელტრამის (2.3) განტოლების კოეფიციენტი მიეკუთვნება $C'_{\gamma}\left(\overline{G_0}\right)$, კლასს და აქვს სახე (იხ. Kveselava, Samsonia 1980)

$$f(z)=W(z)\exp\{K_{\Gamma}(\lambda,W,z)+ic\},\qquad (z\in G)\qquad (3.8)$$

$f(0)=0,\quad f(z_1)=1$ (z_1, Γ წირის ნებისმიერი წერტილია) სადაც ნამდვილი λ ფუნქცია წარმოადგენს შემდეგი ინტეგრალური განტოლების ამონახსნს

$$\lambda[t(\tau)]+\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda[t(\sigma)]dW[t(\sigma)]}{W[t(\sigma)]-W[t(\tau)]}=-\ln W[t(\tau)],\qquad \sigma\in[0,2\pi],\qquad (3.9)$$

ხოლო c მუდმივი გამოითვლება ფორმულით:

$$c=-\arg W(z_1)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\lambda[t(\tau)]d\left[\ln|W[t(\tau)]-W(z_1)|\right],\qquad (3.10)$$

სადაც $\arg W(z_1)$ აღნიშნავს $W(z_1)$ წერტილის არგუმენტის მთავარ მნიშვნელობას, რომელიც მიეკუთვნება $[0,2\pi)$ შუალედს.

(3.9) განტოლება წარმოადგენს ფრედგოლმის განტოლებას რომლის მარჯვენა მხარე მიეკუთვნება $C'_{\gamma 0}[0,2\pi]$, $0<\gamma_0<\min\{\alpha,\gamma\}$ კლასს, რომლის

შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი $\lambda(t)\equiv 0$. ამიტომ (3.9) განტოლებას გააჩნია ერთად ერთი ამონახსნი λ (Kveselava, Samsonia 1980).

ანალოგიურად აიგება ფუნქცია:

$\tilde{f}$ [redacted] $z)\exp\{K_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\lambda},W,z)+i\tilde{c}\},\qquad (z\in\tilde{G}),\qquad (3.11)$

რომელიც $\tilde{G}\in\Omega(G,\varepsilon)$ არეს ასახავს ერთეულოვან წრეზე პირობებით $\tilde{f}(0)=0$, $\tilde{f}(\tilde{z}_1)=1$ ($\tilde{z}_1$, $\tilde{\Gamma}$ წირის ნებისმიერი წერტილია) $\tilde{\lambda}$ წარმოადგენს ფრედგოლმის ტიპის ინტეგრალური განტოლების ერთადერთ ამონახსნს

$$\tilde{\lambda}[\tilde{t}(\tau)]+\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}}\frac{\tilde{\lambda}[\tilde{t}(\sigma)]dW[\tilde{t}(\sigma)]}{W[\tilde{t}(\sigma)]-W[\tilde{t}(\tau)]}=-\ln|W[\tilde{t}(\tau)]|,\qquad \sigma\in[0,2\pi]\qquad (3.12)$$

სადაც $\tilde{\Gamma}\in C'_{\alpha}$, და

$$\tilde{c}=-\arg W(\tilde{z}_1)-\frac{1}{\pi}\int_{\tilde{\Gamma}}\tilde{\lambda}[\tilde{t}(\tau)]d[\ln|W[\tilde{t}(\tau)]-W(\tilde{z}_1)|]\qquad (3.13)$$

ინტეგრალურ განტოლებათა ამონახსნებისა და მათი წარმოებულების სხვაობების შეფასება. მახლობელი არეების კონფორმული ასახვების შესწავლის დროს (იხ. Samsonia, Samkharadze 1999, Zivzivadze, Japaridze 2005, Zivzivadze, Japaridze 2006) გვხვდება შემდეგი ინტეგრალური განტოლებები:

$$\varphi\left[t(\tau)\right]+\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi[t(\sigma)]dt(\sigma)}{t(\sigma)-t(\tau)}=-\ln|t(\tau)|,\qquad t\in\Gamma\qquad (4.1)$$

$$\tilde{\varphi}[\tilde{t}(\tau)]+\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}}\frac{\tilde{\varphi}[\tilde{t}(\sigma)]d\tilde{t}(\sigma)}{\tilde{t}(\sigma)-\tilde{t}(\tau)}=-\ln|\tilde{t}(\tau)|,\qquad \tilde{t}\in\tilde{\Gamma}\qquad (4.2)$$

რომლებიც შედგენილი არიან G და $\tilde{G}$ არეებისათვის შესაბამისად, სადაც $\Gamma,\tilde{\Gamma}\in C'_{\alpha}$ ხოლო φ და $\tilde{\varphi}$ საძიებელი ნამდვილი ფუნქციებია. ეს განტოლებები რომელთა მარჯვენა მხარეები მიეკუთვნებიან $C'_{\alpha}[0,2\pi]$ კლასს, წარმოადგენენ ფრედჰოლმის ტიპის განტოლებებს (იხ. Мусхелишвили 1982: 226-

231) და გააჩნიათ ერთად–ერთი ამონახსნი. ამ ამონახსნების საშუალებით აიგებიან გადამსახველი ფუნქციები.

ამ განტოლებების ამონახსნებისათვის ნაშრომში (Zivzivadze, Japaridze 2022) მიღებულია შეფასებები. კერძოდ, არსებობს $a_1(G) = a_1 \in (0,1)$ მუდმივი ისეთი, რომ თუ G და $\tilde{G} \in \Omega(G,\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \le a_1$ არეების Γ და $\tilde{\Gamma}$ საზღვრები მიეკუთვნებიან C'_α კლასს, მაშინ სამართლიანია შეფასება

$$\| \varphi - \tilde{\varphi} \|_{C_{\alpha-\beta}} \le A_2(G,\beta) \| \varphi \|_{C_{\alpha-\beta}} \varepsilon, \quad \| \varphi' - \tilde{\varphi}' \|_{C_{\alpha-\beta}} \le A_2(G,\beta) \| \varphi' \|_{C_{\alpha-\beta}} \varepsilon, \quad (4.3)$$

სადაც, φ და $\tilde{\varphi}$ (4.1) და (4.2) განტოლებების ერთად–ერთი ამონახსნებია ხოლო β, α–ზე ნაკლები ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

რაც შეეხება (3.9) და (3.12) ინტეგრალური განტოლებების ამონახსნების სხვაობას, იმავე ნაშრომში ნაჩვენებია, რომ არსებობს $a_2(G;W) = a_2 \in (0,1)$ რიცხვი ისეთი, რომ თუ G და $\tilde{G} \in \Omega(G,\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \le a_2$ არეები, რომელთა საზღვრები მიეკუთვნებიან C'_α კლასს ε მახლობელი არიან (2.2) აზრით, მაშინ სამართლიანია შეფასებები:

$$\begin{aligned} \| \lambda - \tilde{\lambda} \|_{C_{\frac{\gamma_0}{2}-\beta}} &\le B_1(G,W,\beta) \| \lambda \|_{C_{\frac{\gamma_0}{2}-\beta}} \cdot \varepsilon^{\gamma_0/2}, \\ \| \lambda' - \tilde{\lambda}' \|_{C_{\frac{\gamma_0}{2}-\beta}} &\le B_1(W,G,\beta) \| \lambda' \|_{C_{\frac{\gamma_0}{2}-\beta}} \cdot \varepsilon^{\gamma_0/2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

სადაც λ и $\tilde{\lambda}$ წარმოადგენენ (3.9) და (3.12) განტოლებების ერთადერთ ამონახსნებს შესაბამისად, γ_0 კი არის ნამდილი მუდმივა (2.4)–დან.

მახლობელი არეების შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალების სხვაობის შეფასება. შემდგომი მსჯელობებისათვის დაგვჭირდება ზოგიერთი შეფასებები. დავუშვათ, გლუვი Γ წირის განტოლებაა (2.1), ხოლო $\tilde{t} = \tilde{t}(\tau)$ $\tau \in [0,2\pi]$ არის $\tilde{\Gamma} = \partial \tilde{G}$–ის განტოლება, სადაც $\tilde{G} \in \Omega(G,\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$. (2.2)–დან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $\tau, \tau_0 \in [0,2\pi]$ გვაქვს

$$| t(\tau) - t(\tau_0) - \tilde{t}(\tau) + \tilde{t}(\tau_0) | \le 2\varepsilon . \quad (5.1)$$

(2.2)–ის საფუძველზე ნებისმიერი $\tau, \tau_0 \in [0, 2\pi]$ მნიშვნელობებისათვის ვღებულობთ შეფასებას

$$|t(\tau)-t(\tau_0)-\tilde{t}(\tau)+\tilde{t}(\tau_0)|=|(t-\tilde{t})(\tau)-(t-\tilde{t})(\tau_0)|\leq$$
$$\leq|\mathrm{Re}[(t-\tilde{t})(\tau)]-\mathrm{Re}[(t-\tilde{t})(\tau_0)]|+|\mathrm{Im}[(t-\tilde{t})(\tau)]-\mathrm{Im}[(t-\tilde{t})(\tau_0)]|= \tag{5.2}$$
$$=(|\mathrm{Re}(t'-\tilde{t}')(\theta_1)|+|\mathrm{Im}(t'-\tilde{t}')(\theta_2)|)|\tau-\tau_0|\leq 2\|t'-\tilde{t}'\|_{C_\alpha}|\tau-\tau_0|\leq 2\varepsilon|\tau-\tau_0|$$

სადაც θ_1 და θ_2 მუდმივები მდებარეობენ τ და τ_0 სიდიდეებს შორის.

თუ გავითვალისწინებთ $t(0)=t(2\pi)$ პირობას (5.2)–ის მსგავსად მიიღება შეფასება

$$|t(\tau)-t(\tau_0)-\tilde{t}(\tau)+\tilde{t}(\tau_0)|\leq 2\varepsilon(2\pi-|\tau-\tau_0|) \tag{5.2'}$$

ნებისმიერი $\tau, \tau_0 \in [0, 2\pi]$.

Γ წირზე ავიღოთ ნებისმიერად $t_0 = t(\tau_0)$ $\tau_0 \in [0, 2\pi]$ წერტილი. მაშინ, თუ $t = t(\tau) \in \Gamma \setminus l(t_0)$, გვაქვს

$$|t(\tau)-t(\tau_0)|\geq R_\Gamma \tag{5.3}$$

სადაც $l(t_0)$ და R_Γ აღნიშნავენ Γ წირის სტანდარტულ რკალს ცენტრით t_0 წერტილში და სტანდარტულ რადიუსს შესაბამისად.

(5.1) და (5.3) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $\tau_0 \in [0, 2\pi]$ მნიშვნელობისათვის და ნებისმიერი τ მნიშვნელობისათვის $\{\tau \in [0, 2\pi];\quad t(\tau) \in \Gamma \setminus l(t_0)\}$ სიმრავლიდან ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\tilde{t}(\tau)-\tilde{t}(\tau_0)|>\frac{1}{2}R_\Gamma \tag{5.3'}$$

როგორიც არ უნდა იყოს $\tilde{\Gamma} = \partial\tilde{G}, \quad \tilde{G} \in \Omega(G, \varepsilon)$, როცა $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4}R_\Gamma]$.

დავუშვათ $t_0 = t(\tau_0) \in \Gamma \setminus l(t'), \quad \tau_0 \in (0, 2\pi)$ სადაც $l(t')$ სტანდარტული რადიუსია ცენტრით $t' = t(0)$ წერტილში. (2.6)–დან ჩანს, რომ თუ $t(\tau) \in l(t_0)$, მაშინ სრულდება უტოლობა

$$|t(\tau)-t(\tau_0)|\geq k_0 s(t_0, t) = k_0\left|\int_{\tau_0}^{\tau}|t'(u)|\,du\right|\geq k_0 p|\tau-\tau_0|$$

სადაც $p = \min\limits_{\tau\in[0;\tau]} |t'(\tau)|$, ხოლო $-k_0$ არის მუდმივი (2.6)–დან. ამრიგად, როგორიც არ უნდა იყოს $t_0 = t_0(\tau_0) \in \Gamma \setminus l(t')$ წერტილი, გვაქვს შეფასება

$$|t(\tau) - t(\tau_0)| \geq k_0 p |\tau - \tau_0| \qquad (5.4)$$

ნებისმიერი $t(\tau) \in l(t_0)$ წერტილისათვის.

გამოვიყენოთ (5.2) და (5.4)–დან ნებისმიერი τ_0–ის $[0, 2\pi]$ სეგმენტიდან, რომელიც აკმაყოფილებს $t_0 = t(\tau_0) \in \Gamma \setminus l(t')$, $t' = t(0)$, პირობებს და ნებისმიერი $\tilde{\Gamma} = \partial \tilde{G}$ წირისათვის, განტოლებით $\tilde{t} = \tilde{t}(\tau), \quad \tau \in [0, 2\pi], \quad \tilde{G} \in \Omega(G, \varepsilon)$, როცა $\varepsilon \in (0, \frac{k_0 p}{4}]$ სრულდება პირობა

$$|\tilde{t}(\tau) - \tilde{t}(\tau_0)| \geq \frac{1}{2} k_0 p |\tau - \tau_0| \qquad (5.4')$$

როგორიც არ უნდა იყოს τ, $\{\tau \in [0, 2\pi] : t(\tau) \in l(t_0)\}$ სიმრავლიდან.

ახლა დავუშვათ, რომ $t_0 \in l(t'), \quad \tau_0 \in [0, 2\pi], \quad t' = t(0)$ და $l(t_0)$ სტანდარტული რკალია $t_1 = t(\tau_1)$ და $t_2 = t(\tau_2)$ ბოლოებით, $0 < \tau_1 < \tau_2 < 2\pi$. ასეთ შემთხვევაში ცხადია, რომ

$l(t_0) = l_1(t_0)$ [redacted] $\}$

განვიხილოთ შემთხვევა როცა $t_0 \in l_1(t_0)$. მაშინ (2.6)–დან გამომდინარეობს, რომ, თუ $t(\tau) \in l_2(t_0)$, მაშინ

$$|t(\tau) - t(\tau_0)| \geq k_0 s(t, t_0) = k_0 \left(|\int_\tau^{2\pi} |t'(u)|\, du + \int_\tau^{2\pi} |t'(u)|\, du \right) \geq k_0 p (2\pi - |\tau - \tau_0|)$$

(5.5)

სადაც $p = \min\limits_{[0,2\pi]} |t'(\tau)|$. ცხადია, იმ შემთხვევაში, როცა $t(\tau) \in l_1(t_0)$ სრულდება (5.4) შეფასება.

(5.2') და (5.5) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ $t_0 \in l_1(t_0)$, მაშინ ნებისმიერი $\tilde{\Gamma} = \partial \tilde{G}$ წირისათვის, რომლის განტოლებაა $\tilde{t} = \tilde{t}(\tau), \quad \tau \in [0, 2\pi]\ \tilde{G} \in \Omega(G, \varepsilon)$, როცა $\varepsilon \in (0, \frac{k_0 p}{4}]$ სამართლიანია უტოლობა

$$|\tilde{t}(\tau) - \tilde{t}(\tau_0)| \geq \frac{k_0 p}{2} (2\pi - |\tau - \tau_0|) \qquad (5.5')$$

როგორიც არ უნდა იყოს τ, $\{\tau \in [0,2\pi]: t(\tau) \in l_2(t_0)\}$ სიმრავლიდან. ცხადია თუ τ მიეკუთვნება $\{\tau \in [0,2\pi]: t(\tau) \in l_1(t_0)\}$ სიმრავლეს, მაშინ სრულდება (5.4.') შეფასება.

განსახილველი დაგვრჩა $t_0 \in l_2(t_0)$ შემთხვევა. წინა შემთხვევის ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა $t(\tau) \in l_1(t_0)$, სრულდება (5.5) და (5.5') შეფასებები, როცა $\tau \in (\tau_2, 2\pi]$ და $\tau \in [0, \tau_1)$ შესაბამისად.

თეორემა 5.1. არსებობს ისეთი $b_0(G) = b_0 \in (0,1)$ მუდმივა, რომ, თუ G და $\tilde{G} \in \Omega(G,\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \le b_0$ არეების საზღვრები მიეკუთვნებიან C'_α კლასს, φ და $\tilde{\varphi}$ წარმოადგენენ (4.1) და (4.2) ინტეგრალური განტოლებების ერთადერთ ამონახსნებს $C'_\alpha[0,2\pi]$ კლასიდან, მაშინ სამართლიანია შეფასება

$$\| S_\Gamma - S_{\tilde{\Gamma}} \|_{C'} \le K_0(G)\varepsilon \tag{5.6}$$

სადაც $S_\Gamma(\tau) = S_\Gamma(\varphi; t(\tau))$ და $S_{\tilde{\Gamma}}(\tau) = S_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\varphi}; \tilde{t}(\tau))$.

დამტკიცება. დასაწყისისთვის დაუშვათ, რომ $t_0 = t(\tau_0)$ ფიქსირებული წერტილია Γ წირზე და $t' = t(0) \bar{\in} l(t_0)$ სადაც $l(t_0) = \{t(\tau); \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2]\}$ არის სტანდარტული რკალი ცენტრით t_0 წერტილში $t_1 = t(\tau_1)$ და $t_2 = t(\tau_2)$ ბოლოებით მასთან $0 < \tau_1 < \tau_0 < \tau_2 < 2\pi$. ჩაწერის სიმოკლის მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$m = m(\tau,\tau_0) = \varphi(\tau) - \varphi(\tau_0), \quad \tilde{m} = \tilde{m}(\tau,\tau_0) = \tilde{\varphi}(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau_0), \qquad \tau, \tau_0 \in [0,2\pi]$$

დავუშვათ, $0 < \delta < \min\{\tau_0; 2\pi - \tau_0, \tau_0 - \tau_1, \tau_2 - \tau_0\}$ და $t_0 = t(\tau_0)$ და $\tilde{t} = \tilde{t}(\tau_0)$ წერტილებისათვის განვიხილოთ $\Gamma_\delta(\tau_0)$ და $\tilde{\Gamma}_\delta(\tilde{t}_0)$ სიმრავლეები (იხ (3.5)) და შევაფასოთ სხვაობა:

$$|J|=\left|\int\limits_{\Gamma_\delta(t_0)}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt-\int\limits_{\tilde\Gamma_\delta(\tilde t_0)}\frac{\tilde\varphi(\tilde t)-\tilde\varphi(\tilde t_0)}{\tilde t-\tilde t_0}d\tilde t\right|\le$$
$$\le\left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_0-\delta}+\int\limits_{\tau_0+\delta}^{\tau_2}\right)\left|\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}t'(\tau)-\frac{\tilde\varphi(\tilde t)-\tilde\varphi(\tilde t_0)}{\tilde t-\tilde t_0}\tilde t'(\tau)\right|d\tau+$$
$$+\left(\int\limits_{0}^{\tau_1}+\int\limits_{\tau_2}^{2\pi}\right)\left|\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}t'(\tau)-\frac{\tilde\varphi(\tilde t)-\tilde\varphi(\tilde t_0)}{\tilde t-\tilde t_0}\tilde t'(\tau)\right|d\tau\le \tag{5.7.}$$
$$\le\left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_0-\delta}+\int\limits_{\tau_2+\delta}^{\tau_2}\right)\left|\frac{mt'[(\tilde t-\tilde t_0)-(t-t_0)]}{(t-t_0)(\tilde t-\tilde t_0)}\right|dt+\left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_0-\delta}+\int\limits_{\tau_0+\delta}^{\tau_2}\right)\left|\frac{(m-\tilde m)}{t-t_0}\right|d\tau+$$
$$+\left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_0-\delta}+\int\limits_{\tau_0+\delta}^{\tau_2}\right)\left|\frac{\tilde m(t'-\tilde t')}{\tilde t-\tilde t_0}\right|d\tau+$$
$$+\left(\int\limits_{0}^{\tau_1}+\int\limits_{\tau_2}^{2\pi}\right)\left[\left|\frac{mt'[(\tilde t-\tilde t_0)-(t-t_0)]}{(t-t_0)(\tilde t-\tilde t_0)}\right|+\left|\frac{(m-\tilde m)}{t-t_0}\right|+\left|\frac{\tilde m(t'-\tilde t')}{\tilde t-\tilde t_0}\right|\right]d\tau=J_1+J_2+J_3+J_4$$

დავუშვათ, $b_0^{'}(G)=b_0^{'}\in(0,1)$ ისეთი მუდმივია, რომ ნებისმიერი $\varepsilon\in(0,b_0^{'}]$ რიცხვისათვის ერთდროულად სრულდება (4.3), (5.3'), (5.4') და (5.5') პირობები. მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\varphi\in C_\alpha^{'}[0,2\pi]$ და გამოვიყენებთ (4.3), (5.1), (5,4) და (5.4') უტოლობებს, ნებისმიერი $\varepsilon\in(0,b_0^{'}]$ნამდვილი რიცხვისათვის მივიღებთ:

$$J_1\le\max_{(0,2\pi]}|t'(\tau)|\frac{4\|\varphi\|_{C_\alpha}\varepsilon}{k_0^2p^2}\left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_0-\delta}+\int\limits_{\tau_0+\delta}^{\tau_2}\right)\frac{|\tau-\tau_0|^\alpha|\tau-\tau_0|}{|\tau-\tau_0|^2}d\tau\le K_1(G)\|\varphi\|_{C_\alpha}\varepsilon \tag{5.8}$$

(4.3) პირობის ძალით ნებისმიერი $\varepsilon\in(0,b_0^{'}]$ რიცხვისათვის მივიღებთ

$$|m-\tilde m|=|(\varphi-\tilde\varphi)(\tau)-(\varphi-\tilde\varphi)(\tau_0)|\le\|\varphi-\tilde\varphi\|_{C_{\alpha-\beta}}|\tau-\tau_0|^{\alpha-\beta}\le K_2(G)\|\varphi\|_{C_{\alpha-\beta}}\varepsilon \tag{5.9}$$

სადაც β არის α–ზე ნაკლები ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. მაშინ (5.4) და (5.9) პირობებიდან მიიღება შეფასება

$$J_2\le K_3(G)\|\varphi\|_{C_{\alpha-\beta}}\varepsilon \tag{5.10}$$

(5.9) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $\varepsilon\in(0,b_0^{'}]$ რიცხვისათვის გვაქვს

$$|\tilde{m}|\leq | m-\tilde{m}|+|m|\leq K_2(G)\|\varphi\|_{C_{\alpha-\beta}}\ \varepsilon+|m|\leq K_4(G)\|\varphi\|_{C_\alpha}.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან (2.2) და (5.4') პირობებიდან ნებისმიერი $\varepsilon\in(0,b_0^{'}]$ რიცხვისეთვის J_3 შესაკრებისათვის (5.7)–დან გამომდინარეობს შეფასება

$$|J_3|\leq K_5(G)\|\varphi\|_{C_{\alpha-\beta}}\ \varepsilon \qquad (5.11)$$

ვინაიდან როცა $\tau\in[0,\tau_1]$[redacted]] სრულდება (5.3) და (5.3') პირობები, მაშინ, წინა შეფასებების მსგავსად, მიიღება, რომ

$$|J_4|\leq K_6(G)\|\varphi\|_{C_{\alpha-\beta}}\ \varepsilon \qquad (5.12)$$

როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon\in(0,b_0^{'}]$ დადებითი რიცხვი.

თუ (5.7)–ში გავითვალისწინებთ (5.8) (5.10) (5.11) და (5.12) პირობებს, რომლებიც სამართლიანი არიან, როცა $\varepsilon\in(0,b_0^{'}]$ და, თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\delta\to 0$ მივიღებთ:

$$|S_\Gamma(\varphi,t(\tau_0))-S_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\varphi},\tilde{t}(\tau_0))|\leq K_7(G)\varepsilon \qquad (5.13)$$

როცა $\tau_0\in[0,2\pi]$ და $t_0=t(\tau_0)\notin l(t')$.

ახლა დავუშვათ, რომ $t_0\in l(t')$, $t'=t(0)$, იმ პირობით, რომ $0\leq\tau_0<\tau_1<\tau_2<2\pi$, სადაც $t_1=t(\tau_1)$ და $t_2=t(\tau_2)$ წერტილები $l(t_0)$ რკალის ბოლოებია. t_0 წერტილის სხვაგვარი განლაგების შემთხვევა $t(0)$ წერტილის მიმართ განიხილება ანალოგიურად. ამრიგად, განიხილება შემთხვევა $0\leq\tau_0<\tau_1<\tau_2<2\pi$. ინტეგრების შუალედი დავანაწილოთ ნაწილებად $[\tau_2;2\pi],[0;\tau_0-\delta],[\tau_0+\delta;\tau_1],[\tau_1;\tau_2]$

$[\tau_2;2\pi]$ შუალედში შესაბამისი შეფასება ε–ის საშუალებით მოხდება (5.2'), (5.5') და (5.5) უტოლობების გამოყენებით, ინტეგრალქვეშა ფუნქციების პერიოდულობის გათვალისწინებით. რაც შეეხება ინტეგრების დანარჩენ შუალედებს შეფასებები მიიღება ზუსტად ისე, როგორც (5.8), (5.10), (5.11) და (5.12) უტოლობების შემთხვევაში. ამრაგად, როცა $\varepsilon\in(0,b_0^{'}]$ და $t_0\in l(t')$ გვაქვს

$$|S_\Gamma(\varphi,t(\tau_0))-S_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\varphi},\tilde{t}(\tau_0))|\leq K_8(G)\varepsilon \qquad (5.14)$$

ვინაიდან t_0 ნებისმიერად იყო აღებული ამიტომ (5.13) და (5.14) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ τ –ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $[0,2\pi]$ სეგმენტიდან და ნებისმიერი $\varepsilon \in (0,b_0^{'}]$ რიცხვისათვის სამართლიანია (5.14) ტიპის შეფასება.

განვიხილოთ სხვაობა

$$S_\Gamma^{'}(\tau)-S_{\tilde{\Gamma}}^{'}(\tau)=(S_\Gamma(\varphi,t(\tau)))_t^{'}\cdot t'(\tau)-(S_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\varphi},\tilde{t}(\tau)))_{\tilde{t}}^{'}\tilde{t}(\tau)=$$

$$=S_\Gamma(g,t(\tau))\cdot t'(\tau)-S_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{g},\tilde{t}(\tau))\tilde{t}'(\tau)=S_\Gamma(g,t(\tau))\cdot[t'(\tau)-\tilde{t}'(\tau)]+ \qquad (5.15)$$

$$+\tilde{t}'(\tau)[S_\Gamma(g,t(\tau)-S_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{g},\tilde{t}(\tau))]$$

სადაც, $g(\tau)=\varphi'(\tau)\,|\,t'(\tau)$ და $\tilde{g}(\tau)=\tilde{\varphi}'(\tau)\,|\,\tilde{t}'(\tau)$.

ვინაიდან φ და $\tilde{\varphi}$ წარმოადგენენ (4.1) და (4.2) განტოლების ამონახსნებს ამიტომ (4.3) და (2.2.) პირობებიდან მარტივად დავადგენთ, რომ ε –ის საკმაოდ მცირე დადებითი მნიშვნელობებისათვის სრულდება შეფასება

$$\| g-\tilde{g}\|_{C_{\alpha-\beta}}\le K_9(G)\varepsilon \qquad (5.16)$$

სადაც β, α –ზე ნაკლები ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. თუ გავიმეორებთ წინა თეორემის დამტკიცებისას მოყვანილ მსჯელობებს, მივალთ იმ დასკვნამდე, რომ საკმარისად მცირე დადებითი ε რიცხვებისათვი სამართლიანია შეფასება

$$|S_\Gamma(g,t(\tau))-S_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{g},\tilde{t}(\tau))|\le K_{10}(G)\varepsilon \qquad (5.17)$$

როგორიც არ უნდა იყოს $\tau\in[0,2\pi]$.

თუ (5.15)–ში გავითვალისწინებთ (2.2) და (5.17) პირობებს და, ასევე, შემდეგ უტოლობებს:

$$|S_\Gamma(g,t(\tau))|\le K_{11}(G)\|g\|_{C_\alpha}\le K_{12}(G)\|\varphi'\|_{C_\alpha},$$

$$|\tilde{t}(\tau)|\le|\tilde{t}(\tau)-t'(\tau)|+|t'(\tau)|<\varepsilon+|t'(\tau)|$$

საბოლოოდ მივიღებთ, რომ მოიძებნება $b_0^{''}(G)=b_0^{''}\in(0,1)$ მუდმივი ისეთი, რომ ნებისმიერი $\varepsilon\in(0,b_0^{''}]$ რიცხვისათვის და ნებისმიერი $\tilde{G}\in\Omega(G,\varepsilon)$ არისათვის გვაქვს შემდეგი შეფასება

$$|S'_{\Gamma}(\tau)-S'_{\tilde{\Gamma}}(\tau)|\leq K_{13}(G)\varepsilon, \qquad \tau\in[0,2\pi] \tag{5.18}$$

თუ დაუშვებთ, რომ $b_0=\min\{b_0', b_0''\}$ მაშინ (5.18), (5.14) და (5.13) პირობებიდან გამომდინარეობს (5.4). თეორემა დამტკიცებულია.

თუ (3.9) და (3.12) ინტეგრალური განტოლებებისათვის გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ როცა G და $\tilde{G}$ არეები მახლობელი არიან , მაშინ $W(G)$ და $W(\tilde{G})$ არეებიც მახლობელი არიან (იხ. Zivzivadze, Japaridze 2022) (4.7) და გამოვიყენებთ თეორემა 5.1–ს, $W(G)$ და $W(\tilde{G})$ არეებისათვის მივიღებთ, რომ სამართლიანია.

თეორემა 5.2. არსებობს $d_0(G,W)=d_0\in(0,1)$ მუდმივი ისეთი, რომ, თუ G და $\tilde{G}\in\Omega(G,\varepsilon)$, $0<\varepsilon\leq d_0$ არეების საზღვრები მიეკუთვნებიან C'_{α}, კლასს, λ და $\tilde{\lambda}$ წარმოადგენენ (3.9) და (3.12) ინტეგრალური განტოლებების ერთადერთ ამონახსნებს $C'_{\gamma 0}[0,2\pi]$ კლასიდან, მაშინ სამართლიანია შეფასება:

$$\left\|\Phi-\tilde{\Phi}\right\|_{C'}\leq P_0(G,W)\varepsilon^{\gamma 0/2}$$

სადაც $\Phi(\tau)=S_{\Gamma}(\lambda,W,t(\tau))$ და $\tilde{\Phi}(\tau)=S_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\lambda},W,\tilde{t}(\tau))$, ხოლო γ_0, $0<\gamma_0<\min\{\alpha,\gamma\}$ არის მუდმივა (2.4) პირობიდან.

არეთა კვაზიკონფორმული ასახვების სასაზღვრო მნიშვნელობებისა და მათი წარმოებულების სხვაობების შეფასება. G და $\tilde{G}$ არეების ერთეულოვან წრეზე კვაზიკონფორმულად ამსახველი f და $\tilde{f}$ ფუნქციების სასაზღვრო მნიშვნელობები განისაზღვრებიან (3.8) და (3.11) ფორმულებიდან. (3.7)–ის ძალით გვექნება

$$f(\tau)=f[t(\tau)]=\lim_{z\to t} f(z)=W(t)\exp\left\{K_{\Gamma}^{+}(\lambda,W,t)+ic\right\},\quad (z\in G),(t\in\Gamma)$$

$$\tilde{f}(\tau)=\tilde{f}[\tilde{t}(\tau)]=\lim_{z\to\tilde{t}} f(z)=W(\tilde{t})\exp\left\{K_{\tilde{\Gamma}}^{+}(\tilde{\lambda},W,\tilde{t})+i\tilde{c}\right\},\quad (z\in\tilde{G}),(\tilde{t}\in\tilde{\Gamma})$$

(6.1) $\tau\in[0,2\pi]$, სადაც c და $\tilde{c}$ განისაზღვრებიან (3.10) და (3.13) ფორმულებიდან ხოლო λ და $\tilde{\lambda}$ ფუნქციები წარმოადგენენ (3.9) და (3.12) განტოლებების ამონახსნებს.

თეორემა 6.1. ვთქვათ, f და $\tilde{f}$ კვაზიკონფორმულად ასახავენ G და $\tilde{G}\in\Omega(G,\varepsilon)$, $(0<\varepsilon<1)$ არეებს, $\Gamma,\tilde{\Gamma}\in C_{\alpha}^{'}$ საზღვრებით ერთეულოვან წრეზე პირობებით $f(0)=0,\ \ f(z_1)=1$ და $\tilde{f}(0)=0,\ \ \tilde{f}(\tilde{z}_1)=1$, სადაც $z_1=t(\tau_1),\ \ \tau_1\in[0,2\pi]$ ნებისმიერი წერტილია Γ, წირზე ხოლო $\tilde{z}_1=\tilde{t}(\tau_1)\in\tilde{\Gamma}$. მაშინ გვაქვს შეფასება:

$$|f(\tau)-\tilde{f}(\tau)|\le M_0(G,W)\varepsilon^{\gamma_0/2},\qquad \tau\in[0,2\pi]\ ,(6.2)$$

სადაც γ_0, $0<\gamma_0<\min\{\alpha,\gamma\}$ წარმოადგენს მუდმივას (2.4) პირობიდან.

დამტკიცება: დავუშვათ, $t=t(\tau)$ არის Γ წირის ნებისმიერი წერტილი და $\tilde{t}=\tilde{t}(\tau)\in\tilde{\Gamma}$, $\tau\in[0,2\pi]$. სხვაობა f და $\tilde{f}$ ფუნქციების სასაზღვრო მნიშვნელობების სხვაობა ჩავწეროთ ასეთი სახით:

$$f(\tau)-\tilde{f}(\tau)=f(t)\frac{W(t)-W(\tilde{t})}{W(t)}+\tilde{f}(\tilde{t})[e^{\Phi(\tau)}-1],\tag{6.3}$$

სადაც

$$\Phi(\tau)=K_{\Gamma}^{+}(\lambda,W,t(\tau))-K_{\tilde{\Gamma}}^{+}(\tilde{\lambda},W,\tilde{t}(\tau))+i(c-\tilde{c}).\tag{6.4}$$

დავუშვათ, რომ $\min\limits_{[0,2\pi]}|W[t(\tau)]|=m>0$. მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $|f(t)|=1$, როცა $t\in\Gamma$ და ასევე (2.2) და (2.4) პირობებს, (6.3)–ის პირველი შესაკრებისათვის მივიღებთ შეფასებას:

$$\left| f(t)\frac{W(t)-W(\tilde{t})}{W(t)} \right| \le M_1(G,W)\varepsilon^{\gamma_0} . \qquad (6.5)$$

ახლა განვიხილოთ სხვაობა

$$K^+_\Gamma(\lambda,W,t)-K^+_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\lambda},\tilde{W},\tilde{t})=2[\lambda(\tau)-\tilde{\lambda}(\tau)]+[S_\Gamma(\lambda,W,t)-S_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\lambda},\tilde{W},\tilde{t})],$$

სადაც λ და $\tilde{\lambda}$ წარმოადგენენ (3.9) და (3.12) განტოლებების ერთადერთ ამონახსნებს შესაბამისად. უკანასკნელი ტოლობიდან (4.4) პირობისა და 5.2 თეორემის ძალით ვასკვნით, რომ მოიძებნება $\varepsilon_1=\varepsilon_1(G,W)$ $0<\varepsilon_1\le\min\{a_2;d_0\}$ მუდმივა, სადაც $a_2=a_2(G,W)$ და $d_0=d_0(G,W)$ მუდმივები (4.4) უტოლობასა და 5.2 თეორემაში მონაწილე მუდმივებია შესაბამისად, ისეთი,რომ ნებისმიერი $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$, რიცხვისათვისა და ნებისმიერი $\tilde{G}\in G(\Omega,\varepsilon)$ არისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$|K^+_\Gamma(\lambda,W,t)-K^+_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\lambda},\tilde{W},\tilde{t})|\le M_2(G,W)\varepsilon^{\gamma_0/2} . \qquad (6.6)$$

c და $\tilde{c}$ კონსტანტებს შორის სხვაობის შეფასების მიზნით ეს სხვაობა ჩავწეროთ ასეთი სახით:

$$c-\tilde{c}=-[\arg W(z_1)-\arg\tilde{W}(\tilde{z}_1)]+\operatorname{Im}[S_\Gamma(\lambda,W,z_1)-S_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\lambda},\tilde{W},\tilde{z}_1)] . \qquad (6.7)$$

თეორემა 5.2–დან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს შეფასებას

$$|\operatorname{Im}[S_\Gamma(\lambda,W,z_1)-S_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\lambda},\tilde{W},\tilde{z}_1)]|\le M_3(G,W)\varepsilon^{\gamma_0/2} . \qquad (6.8)$$

ვინაიდან $W\in G_{\gamma_0}(\overline{G}_0)$ (იხ. (2.4)), ამიტომ (2.2)–ის გათვალისწინებით მოიძებნება $P_0=P_0(G_0;W)>0$ მუდმივი ისეთი, რომ სრულდება უტოლოლობა

$$|W(z_1)-W(\tilde{z}_1)|<P_0(G_0,W)\varepsilon^{\gamma_0} . \qquad (6.9)$$

ავირჩიოთ $\varepsilon_2\in(0,1)$ ისე, რომ ნებისმიერი $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$ რიცხვისათვის შესრულდეს პირობა:

$$P_0(G_0,W)\varepsilon^{\gamma_0} < \frac{1}{2}m \quad , \tag{6.10}$$

სადაც $m = \min\limits_{[0,2\pi]} |W[t(\tau)]| > 0$.

დავუშვათ $B(W(z_1), r(\varepsilon))$ არის წრე ცენტრით $W\left(z_1\right)$ წერტილში და რადიუსით $r\left(\varepsilon\right) = P_0\varepsilon^{\gamma_0}$. (6.9) და (6.10) პირობებიდან გამოდის, რომ $W(\tilde{z}_1) \in B\left(W\left(z_1\right), r\left(\varepsilon\right)\right)$ და ეს წრე არ შეიცავს კოორდინატთა სათავეს.

კომპლექსურ სივრცეში განვიხილოთ ვექტორი, რომლის საწყისია კოორდინატთა სათავეში, ხოლო ბოლო $W\left(z_1\right)$ წერტილში და ეს ვექტორი აღვნიშნოთ ისევ $W\left(z_1\right)$–ით. დავუშვათ $\theta(0 \le \theta \le \pi)$ არის კუთხე $W\left(z_1\right)$ და $W(\tilde{z}_1)$ ვექტორებს შორის. როგორც აღინიშნა, $\arg W(z)$ წარმოადგენს არგუმენტის მთავარ მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსდება $[0, 2\pi)$ შუალედში. ცხადია, რომ ასეთ პირობებში ნებისმიერი $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ რიცხვისათვის და $W\left(z_1\right)$ და $W(\tilde{z}_1)$ ვექტორების ნებისმიერი განლაგების შემთხვევაში arg $W\left(z_1\right)$ - $\arg W(\tilde{z}_1)$ სხვაობა ტოლია ან $\pm\theta$ ან $\pm(2\pi - \theta)$. ნებისმიერ შემთხვევაში (6.4)–დან გვაქვს, რომ

$$e^{\Phi(\tau)} - 1 = e^{\Phi_0(\tau)} - 1 \quad , \tag{6.11}$$

როგორიც არ უნდა იყვნენ $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ და $\tau \in [0, 2\pi]$ რიცხვები, სადაც

$$\Phi_0\left(\tau\right) = K_\Gamma^+(\lambda, W, t) - K_{\tilde{\Gamma}}^+(\lambda, W, \tilde{t}) + i(\operatorname{Im}[S_\Gamma(\lambda, W, z_1) - S_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\lambda}, W, \tilde{z}_1)] \pm \theta)$$

(6.12)

კორდინატთა სათავიდან იმ წრეწირისადმი, რომლის ცენტრი $W\left(z_1\right)$ წერტილშია და რადიუსი $r = r(\varepsilon) = P_0\varepsilon^{\gamma_0}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ გავატაროთ მხებები, რომელთა შორის კუთხე იყოს 2η. ვინაიდან $W(\tilde{z}_1) \in B(W(z_1), r(\varepsilon))$, ამიტომ ცხადია უტოლობა

$$\theta < \eta < \frac{r(\varepsilon)}{k} = \frac{P_0\varepsilon^{\gamma_0}}{k}, \tag{6.13}$$

სადაც k არის მხების მონაკვეთის სიგრძე სათავიდან შეხების წერტილამდე. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $k > |W(z_1)| - r(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} m$, მაშინ (6.10) და (6.13) პირობებიდან მივიღებთ

$$\theta < M_4(G,W)\varepsilon^{\gamma_0}, \tag{6.14}$$

როცა $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$.

შევნიშნოთ, რომ (6.6) და (6.8) პირობები სრულდება, როცა $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, ხოლო (6.14) უტოლობა, როცა $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$. მაშინ, თუ $\varepsilon' = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, (6.12)-დან (6.6), (6.8) და (6.14) პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$|\Phi_0(\tau)| \leq M_5(G,W)\varepsilon^{\gamma_0/2} \tag{6.15}$$

როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon \in (0, \varepsilon']$ და $\tau \in [0, 2\pi]$.

დავუშვათ $\delta > 0$ ისეთია, რომ $|e^z - 1| < \frac{\varepsilon}{2}|z|$, როცა $|z| < \delta$. დავუშვათ $\varepsilon_0, \varepsilon_0 < \varepsilon'$ მცირე დადებითი რიცხვი ისეთია, რომ ნებისმიერი $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ რიცხვისათვის სრულდება პირობა $M_5(G,W)\varepsilon^{\gamma_0/2} < \delta$. მაშინ (6.11) და (6.15) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერიc $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ და $\tau \in [0, 2\pi]$ რიცხვებისათვის გვაქვს

$$|e^{\Phi(\tau)} - 1| = |e^{\Phi_0(\tau)} - 1| < M_6(G,W)\varepsilon^{\gamma_0/2}. \tag{6.16}$$

აქედან იმის გათვალისწინებით, რომ $|\tilde{f}(\tilde{t})| = 1$ როცა $\tilde{t} \in \tilde{\Gamma}$ (6.5) და (6.16) პირობების საფუძველზე (6.3)-დან მიიღება (6.2) შეფასება, როცა $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

რადგან $f(t) - \tilde{f}(\tilde{t})$ შემოსაზღვრულია, ამიტომ მიღებული შეფასება მარტივად გავრცელდება (სხვა მუდმივით) იმ შემთხვევასიც როცა $0 < \varepsilon < 1$. თეორემა დამტკიცებულია.

პარაგრაფის ბოლოს განვიხილოთ საკითხი f და $\tilde{f}$ ფუნქციების სასაზღვრო მნიშვნელობების წარმოებულების სხვაობის შეფასების შესახებ. (6.1)-დან ვღებულობთ

$$f'(\tau) = \frac{W'(\tau)}{W(\tau)} f(\tau) + f(\tau) \cdot (K_\Gamma^+(\lambda, W, t(\tau))'_\tau. \tag{6.17}$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.5) ფორმულას და (3.6) და (3.7) გამოსახულებებს, (6.17) მიიღებს სახეს

$$f'(\tau)=\frac{W'(\tau)}{W(\tau)}f(\tau)+f(\tau)\cdot W'(\tau)K_{\Gamma}^{+}(g,W,t(\tau)),$$

სადაც $g[t(\tau)]=g(\tau)=\lambda'(\tau)/W'(\tau)$ ფუნქცია მიეკუთვნება $C_{\gamma 0}[0,2\pi]$, $0<\gamma_0<\min\{\alpha,\gamma\}$, კლასს.

ანალოგიურად მიიღება გამოსახულება:

$$\tilde{f}'(\tau)=\frac{W'(\tau)}{W(\tau)}\tilde{f}(\tau)+\tilde{f}(\tau)\cdot W'(\tau)K_{\tilde{\Gamma}}^{+}(\tilde{g},W,\tilde{t}(\tau)),$$

სადაც $\tilde{g}(\tau)=\tilde{\lambda}'(\tau)/W'(\tau)$ и $\tilde{g}(\tau)\in C_{\gamma 0}[0,2\pi]$.

თუ წარმოებულების სხვაობას ჩავწერთ ასეთი სახით:

$$(f'-\tilde{f}')(\tau)=(f-\tilde{f})(\tau)W'(\tau)[K_{\Gamma}^{+}(\mathrm{g},W,t(\tau))+\frac{1}{W(\tau)}]+$$

$$+W'(\tau)\tilde{f}(\tau)[K_{\Gamma}^{+}(\mathrm{g},W,t(\tau))-K_{\tilde{\Gamma}}^{+}(\tilde{g},W,\tilde{t}(\tau))]$$

და გამოვიყენებთ 6.1 და 5.2 თეორემებს, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ f' და $\tilde{f}'$ წარმოებულების სხვაობისათვის სამართლიანია (6.2)-ის ანალოგიური შეფასება. უფრო ზუსტად სამართლიანია

თეორემა 6.2. ვთქვათ, f და $\tilde{f}$ კვაზიკონფორმულად ასახავენ G და $\tilde{G}\in\Omega(G,\varepsilon),(0<\varepsilon<1)$ არეებს $\Gamma,\tilde{\Gamma}\in C_{\alpha}'$ საზღვრებით, ერთეულოვან წრეზე, $f(0)=0,\quad f(z_1)=1$ და $\tilde{f}(0)=0$, $\tilde{f}(\tilde{z}_1)=1$ პირობებით, სადაც $z_1=t(\tau_1),\quad \tau_1\in[0,2\pi]$, Γ წრის ნებისმიერი წერტილია, ხოლო $\tilde{z}_1=\tilde{t}(\tau_1)\in\tilde{\Gamma}$. მაშინ გვაქვს ასეთი შეფასება

$$\| f-\tilde{f}\|_{C'}\leq P(G,W)\varepsilon^{\gamma 0/2},$$

სადაც γ_0, $0<\gamma_0<\min\{\alpha,\gamma\}$ მუდმივია (2.4) პირობიდან, $P=P(G,W)$ მუდმივი არ არის დამოკიდებული ε -ზე და განისაზღვრება G არისა და W ჰომეომორფიზმის საშუალებით.

ლიტერატურა

ზივზივაძე-ჯაფარიძე, ლ. ჯაფარიძე ე. 2022. „მახლობელ არეთა კვაზიკონფორმული ასახვების ერთი ამოცანის შესახებ“, აწსუ მოამბე, 1(19), 2022:167-185.

Kveselava, D. A. Samsonia, Z.V. 1980. „On the quasiconformal mapping of domains“. *Metrich. Voprosi Teorii Funktsii* (Metric Problems of Function Theory). Kiev: Naukova Dumka, 1980: 53-65.

Manjavidze, G. F. 1967. „A boundary value problem of linear conjugation with displacement and its relation to the theory of generalized analitic functions“. *Trans. Tbil. Math. Inst.* 33, 1967: 82-87.

Samsonia, Z. V. Samkharadze, I.G. 1999. „On quasiconformal mapping corresponding to the Beltrami equation“. *Ukrainian Math. Journal.* vol. 51. no. 10. 1999.

Vekua, I.N. 1988 . *Generalized analytic functions.* Moscow: Nauka.

Zivzivadze, L. Japaridze, E. 2005. „On estimation of exactnes in conformal mappings of neighbouring domains“. *Bull. Georg. Acad. Sci.* Vol. 171. N3 2005: 420-424.

Zivzivadze, L. Japaridze, E. 2006. „On Approximation of Functions Mapping Conformally Neighbouring Domains“. *Bull. Georg. Acad Sci.* Vol. 174. N2 2006: 215-219.

Батырев, А. В. 1960. «Конформные отображения близких областей”. Сборник *Исследоавние по современным проблемам теории функции комплексного переменного.* М. Физматгиз, 1960: 358-365.

Вертгеим, Б. А. 1960. „Приближенное построение некоторых квазиконформных отображений“. Сб. *Исследование по современным проблемам теории функции комплексного переменного.* М. Физматгиз , 1960: 519-585.

Гахов, Ф. Д. 1963. *Краевые задачи.* Москва: Государственное издателство физико-математической литературы.

Лаврентьев, М. А. 1947. „Общая теория квазиконформных отображений плоских областей“. *Мат. сб.* Т. 21 (69), 1947: 285-320.

Лаврентьев, М. А. 1948. „Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей“. *Известия АН СССР сер. Матем.* 1948: 513-554.

Лаврентьев, М. А. 1962. *Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений элиптического типа.* М. Изд-во АН СССР.

Лаврентьев, М. А. Шабат, Б. В. 1958. *Методи теории функций комплескного переменного.* М. Физматгиз.

Мусхелишвили, Н. И. 1982. *Сингулярные интегральные уравнения.* Тбилиси: Издательство «Мецниереба».

Фоминих, Ю. Ф. 1974. „Приближенные квазиконформные отображения“. Сб. *Метрические вопросы теории функции и отображения.* Киев 1974: 146-164.

Analysis

Boundary Estimates
Of Quasiconformal Mappings of Closed Domains

Lela Zivzivadze-Japaridze,
lela.japaridze@atsu.edu.ge
Erekle Japaridze
Akaki Tsereteli State University
Kutaisi, Georgia

In the present paper, using the method of boundary integral equations, we consider quasiconformal mappings of closed domains onto a unit circle and establish the estimates allowing one discuss closeness of various values encountered under the construction of these vales through ε, where ε> 0 is a real parameter characterising the domains closeness. In particular, through ε is estimated of the difference of singular integrals corresponding to the close domains and by the order of closeness of domains we estimate the difference of boundary values of mapping functions.

Keywords: *quasiconformal mapping, system of Beltrami equations, integral equations.*

The problems connected with conformal and quasiconformal mappings of closed domains are highly actual owing to their wide applications. When solving many important problems of applied character we can frequently meet the functions performing certain quasiconformal mappings corresponding to some elliptic systems prescribed in the mappable domains. It is worth therefore to have the methods allowing one to construct such functions effectively or approximately. When constructing such functions, the knowledge of certain boundary estimates for quasiconformal mappings of close domains is important. The methods making it possible to construct approximately certain mapping functions are suggested in (Vertgeˇım 1960, Fominyh 1974).

In many problems, it is important to know how a small deformation of a contour of the initial domain affects the form of the mapping function and how vary its configuration both in the domain and on its boundary. Significant results in this direction can be found in (Batyrev 1960, Lavrent'ev 1947, Lavrent'ev, Shabat 1958, Samsoniya, Samkharadze 1999).

Finally, it should be noted that estimates of the difference of boundary values, as well as of their derivatives under conformal mapping of close domains when the main domain and its close ones are star-like with respect to the point z = 0, have been considered by the authors in (Zivzivadze, Japaridze 2005, Zivzivadze, Japaridze 2006).

On the complex domain $\mathbb{C}$, $z = x + iy$, we consider a simply connected domain G, $0 \in G$ bounded by a simple, closed, smooth contour Γ with the equation given parametrically:

$$t = t(\tau) = x(\tau) + iy(\tau), \quad 0 \le \tau \le 2\pi, \quad t(0) = t(2\pi). \tag{1}$$

When the τ parameter growth here corresponds the motion of the point $t = t(\tau)$ under which the interior of Γ remains on the left. The functions $x(\tau)$ and $y(\tau)$ are assumed to be 2π periodic.

We say that the curve Γ given by equation (1) belongs to the class $C_\alpha^{'}$ if $t \in C_\alpha^{'}\left[0;2\pi\right]$. If the function $f(z)$ on the closed set $\overline{G}$ satisfies the H¨older condition with exponent α, $0 < \alpha \le 1$, then we write $f \in C_\alpha(\overline{G})$.

In the sequel, we will consider particular families of domains, close to the given domains in the definite sense.

Defnition (Samsoniya, Samkharadze 1999). Assume that a simply connected domain G, $0 \in G$, is bounded by a simple closed smooth contour $\Gamma \in C_\alpha^{'}$, $0 < \alpha \le 1$ and on the plane $\mathbb{C}$, we consider another simply connected domain $\tilde{G}$ with the equation of boundary $\tilde{\Gamma}$,

$\tilde{t} = \tilde{t}(\tau) = \tilde{x}(\tau) + i\tilde{y}(\tau), \quad 0 \le \tau \le 2\pi, \quad \tilde{t}(0) = \tilde{t}(2\pi)$

And $\tilde{\Gamma} \in C_\alpha^{'}$. The domain $\tilde{G}$ we call ε-close $(0 < \varepsilon < 1)$ to the domain G if the conditions

$$|t(\tau) - \tilde{t}(\tau)| \le \varepsilon, \ \tau \in [0;2\pi], \ \|t' - \tilde{t}'\|_{C_\alpha} \le \varepsilon, \ 0 < \alpha \le 1 \tag{2}$$

are fulfilled.

For any $\varepsilon \in (0;1)$, we surely have an infinite set of domains ε-close to G which we denote by $\Omega(G;\varepsilon)$.

Let G_0 be a simply connected domain of complex domain $\mathbb{C}$ with boundary $\partial G_0 = \Gamma_0 \in C_\alpha^{'}$, $0 < \alpha \le 1$, such that $G \subset G_0$, and for any $\tilde{G} \in \Omega(G;\varepsilon)$, $\tilde{G} \subset G_0$.

In the plane $\mathbb{C}$, consider a system of Beltrami equations in a complex form

$$\omega_{\bar{z}} = q(z)\omega_z \tag{3}$$

under the assumption that $\left|q(z)\right| \le Q_0 < 1, \quad q \in C'_\gamma\left(\bar{G}_0\right), \quad 0 < \gamma \le 1$ for $z \in \tilde{G}_0$ and $q(z) = 0$ for $z \in \mathbb{C} / \overline{G}_0$, where

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} - i\,\frac{\partial\omega}{\partial y}\right), \quad \omega_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + i\,\frac{\partial\omega}{\partial y}\right).$$

Suppose that W is a solution of system (3), the so-called global homeomorphism of the whole complex plane $\mathbb{C}$ of the Beltrami equation constructed by I. N. Vekua's scheme (I. N. Vekua, 1988, Ch. 2) which realises homeomorphic mapping of the plane $\mathbb{C}$ onto itself, $W(0) = 0$, $W(\infty) = \infty$, $z^{-1} W(z) \to 1$ for $|z| \to \infty$, and according to (G. F. Manjavidze 1967)

$$W, W_z, W_{\bar z} \in C_{\gamma_0}(\overline{G}_0), \quad \text{where} \quad 0 < \gamma_0 < \min\{\alpha, \gamma\}. \qquad (4)$$

The homeomorphism $W(z)$ is known in literature as the basic homeomorphism of equation (3).

They say that a complex function $\omega = f(z)$ realises quasiconformal mapping (corresponding to system (3)) of a simply connected domain G onto a unit circle $|\omega| < 1$ if ω homeomorphically maps G onto $|\omega| < 1$ and satisfies condition (3).

Effective methods of constructing quasiconformal mappings of simply– and multiply-connected domains corresponding to the Beltrami equation (3) have been elaborated in (Kveselava, Samsonija 1980).

As it has been mentioned in (D. A. Kveselava and Z. V. Samsonija, 1980), the function was constructed which mapped quasiconformally a simply connected domain $G\,(0 \in G)$ onto a unit circle. The construction of such a function is realized under the assumption that the coefficient of Beltrami's equation belongs to the class $C'_\gamma\left(\bar{G}_0\right)$ and has the form (see Kveselava, Samsonija 1980)

$$f(z) = W(z)\exp\left\{K_\Gamma(\lambda; W, z) + ic\right\}, \quad z \in G, \qquad (5)$$

$f(0) = 0$, $f(z_1) = 1$ (z_1 is any point of line Γ), where the real function λ is a solution of the integral equation

$$\lambda[t(\tau)] + \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\lambda[t(\sigma)]}{W[t(\sigma)] - W[t(\tau)]}\,dW[t(\sigma)] = -\ln W[t(\tau)], \quad \sigma \in [0; 2\pi \qquad (6)$$

and the constant c is calculated from the formula

$$c = -\arg W(z_1) - \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma} \lambda[t(\tau)]\, d\big[\ln \big|W[t(\tau)] - W(z_1)\big|\big] \qquad , \tag{7}$$

where $\arg W(z_1)$ is a principal value of the argument of the point $W(z_1)$ which belongs to the interval $[0;2\pi)$.

Analogously we construct the function

$$\widetilde{f}(z) = W(z)\exp\big\{K_{\widetilde{\Gamma}}(\widetilde{\lambda}; W, z) + i\widetilde{c}\big\}, \;\; z \in \widetilde{G}, \tag{8}$$

which quasiconformally maps the domain $\tilde{G} \in \Omega(G;\varepsilon)$ onto the unit circle with the fulfilment of the conditions $\tilde{f}$ [redacted] 1 ($\tilde{z}_1$ is any point of line $\tilde{\Gamma}$), where the real function $\tilde{\lambda}$ is a unique solution of the Fredholm type integral equation

$$\widetilde{\lambda}[\widetilde{t}(\tau)] + \operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\widetilde{\Gamma}} \frac{\widetilde{\lambda}[\widetilde{t}(\sigma)]}{W[\widetilde{t}(\sigma)] - W[\widetilde{t}(\tau)]}\, dW[\widetilde{t}(\sigma)] = -\ln\big|W[\widetilde{t}(\tau)]\big|, \;\; \sigma \in [0; 2\pi] \quad , \tag{9}$$

where $\tilde{\Gamma} \in C'_{\alpha}$ and

$$\widetilde{c} = -\arg W(\widetilde{z}_1) - \frac{1}{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}} \widetilde{\lambda}[\widetilde{t}(\tau)]\, d\big[\ln\big|W[\widetilde{t}(\tau)] - W(\widetilde{z}_1)\big|\big] \quad . \tag{10}$$

When establishing different estimates characterising the closeness of quantities, it becomes necessary to know the estimate for the difference of solutions and their derivatives of integral equations written for the close to each other domains.

On studying conformal mappings of closed domains (see Samsoniya, Samkharadze 1999, Zivzivadze, Japaridze 2005, Zivzivadze, Japaridze 2006) we meet the following integral equations:

$$\varphi[t(\tau)] + \operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi[t(\sigma)]}{t(\sigma) - t(\tau)}\, dt(\sigma) = -\ln|t(\tau)|, \;\; t \in \Gamma \tag{11}$$

$$\widetilde{\varphi}[\widetilde{t}(\tau)] + \operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\widetilde{\Gamma}} \frac{\widetilde{\varphi}[\widetilde{t}(\sigma)]}{\widetilde{t}(\sigma) - \widetilde{t}(\tau)}\, d\widetilde{t}(\sigma) = -\ln|\widetilde{t}(\tau)|, \;\; \widetilde{t} \in \widetilde{\Gamma}, \tag{12}$$

written for the domains G and $\tilde{G}$, respectively, where $\Gamma, \tilde{\Gamma} \in C'_{\alpha}$, while φ and $\tilde{\varphi}$ are the unknown real functions. The above equations whose free terms belong to the class $C'_\alpha\left[0;2\pi\right]$ are of Fredholm type (see Muskhelishvili 1982: 226–231) and have unique solutions. These solutions are used for the construction of mapping functions.

In this peper is proved following theorems:

Theorem 1. There exists the constant $b_0(G) = b_0 \in (0,1)$ such that if the boundaries of the domains G and, $\tilde{G}$ [redacted] $(G;\varepsilon)$ $0 < \varepsilon \le b_0$, belong to the class C'_α, φ and $\tilde{\varphi}$ are the unique solutions of integral equations (11) and (12) of the class $C'_\alpha\left[0;2\pi\right]$ then the estimate

$$\|S_\Gamma - S_{\tilde{\Gamma}}\|_{C'} \le K_0(G)\varepsilon$$

Is valid, where $S_\Gamma(\tau) = S_\Gamma(\Phi;t(\tau))$ *and* S [redacted] $(\tau))$.

$$K_\Gamma(\mu,z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\mu(t)}{t-z}\,dt, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma,$$

$$S_\Gamma(\mu,t) = S_\Gamma(\mu,t(\tau)) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\mu[t(\sigma)] - \mu[t(\tau)]}{t(\sigma)-t(\tau)}\,dt(\sigma)$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_\eta} \frac{\mu[t(\sigma)] - \mu[t(\tau)]}{t(\sigma)-t(\tau)}\,dt(\sigma), \quad \sigma \in [0;2\pi]$$

Theorem 2. There exists the constant $d_0(G,W) = d_0 \in (0;1)$ such that if the boundaries of domains G and $\tilde{G}$ [redacted] $(G;\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \le d_0$ belong to the class C'_α, λ and $\tilde{\lambda}$ are the unique solutions of integral equations (6) and (9) of the class $C'_{\gamma_0}\left[0;2\pi\right]$, then the estimate

$$\|\Phi - \tilde{\Phi}\|_{C'} \le P_0(G,W)\varepsilon^{\frac{\gamma_0}{2}}$$

is valid, where $\Phi(\tau) = S_\Gamma(\lambda;W,t(\tau))$, $\tilde{\Phi}$ [redacted] $(\tau))$,

and γ_0, $0 < \gamma_0 < \min\{\alpha,\gamma\}$ is the constant from (4).

Theorem 3. Let f and $\tilde{f}$ map quasiconformally the domains G and $\tilde{G} \in \Omega(G;\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$, with boundaries Γ, $\tilde{\Gamma} \in C'_\alpha$ onto the unit circle with the conditions

$f(0) = 0, \quad f(z_1) = 1, \quad \tilde{f}(0) = 0, \quad \tilde{f}(\tilde{z}_1) = 1$,

where $z_1 = t(\tau_1)$, $\tau_1 \in [0;2\pi]$ is any point on Γ, and $\tilde{z}$ [redacted] $\in \tilde{\Gamma}$. Then we have the estimate

$$|f(\tau) - \tilde{f}(\tau)| \le M_0(G,W)\varepsilon^{\frac{\gamma_0}{2}}, \quad \tau \in [0,2\pi], \tag{6.2}$$

where γ_0, $0 < \gamma_0 < \min\{\alpha,\gamma\}$ is the constant from (4).

Theorem 4. Let f and $\tilde{f}$ map quasiconformally the domains G and $\tilde{G} \in \Omega(G;\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$, with boundaries $\Gamma, \tilde{\Gamma} \in C'_{\alpha}$ onto the unit circle with the conditions $f(0) = 0$, $f(z_1) = 1$ and $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}(\tilde{z}_1) = 1$, where $z_1 = t(\tau_1)$, $\tau_1 \in [0;2\pi]$ is any point on Γ, and $\tilde{z}_1$ [redacted] $\in \tilde{\Gamma}$. Then we have the following estimate:

$$\|f - \tilde{f}\|_{C'} \le P(G,W)\varepsilon^{\frac{\gamma_0}{2}},$$

where γ_0, $0 < \gamma_0 < \min\{\alpha,\gamma\}$ is the constant from (4), while the constant $P = P(G,W)$ does not depend on ε and is fully defined by the representation of the initial domain G and homomorphism W.