გამოთვლითი მათემატიკა

# წონიანი საწყისი ამოცანის ამოხსნადობა მაღალი რიგის არაწრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისათვის

**ზაზა სოხაძე**
**ლამარა ციბაძე**
lamara.tsibadze@atsu.edu.ge
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთასი, საქართველო

*ნაშრომში დადგენილია მაღალი რიგის არაწრფივი ფუნქცინალურ-დიფერენციალური განტოლებებისათვის, წონიანი ამოცანის ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები.*

***საკვანძო სიტყვები:*** *მაღალი რიგის არაწრფივი სინგულარული დიფერენციალური განტოლებები; კოშის წონიანი ამოცანის ამოხსნადობა.*

სასრულ $[a,b]$ შუალედში განვიხილოთ $n$-ური რიგის არაწრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება:

$$u^{(n)}(t)=f\Big(t,u\big(\tau_1(t)\big),\dots,u^{(n-1)}\big(\tau_n(t)\big)\Big) \qquad (1)$$

წონიანი საწყისი პირობებით

$$\lim_{t\to a}\Big(\rho(t)u^{(i-1)}(t)\Big)=0 \qquad (i=1,\dots,n), \qquad (2)$$

სადაც ფუნქცია $f:\,]a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ აკმაყოფილებს კარათეოდორის ლოკალურ პირობებს, $\tau_i:\,]a,b[\,\to\,]a,b[$ $(i=1,\dots,n)$-ზომადი ფუნქციებია, ხოლო $\rho:\,]a,b]\to\,]0,+\infty[$ -უწყვეტი არაზრდადი ფუნქციაა.

აღვნიშნოთ

$$f^*(t,x)=\max\left\{\left|f(t,x_1,\dots,x_n)\right|:\sum_{i=1}^{n}|x_i|\le x\right\}, \text{ როცა } a<t<b,\ x>0.$$

ყველგან ქვემოთ ვიგულისხმოთ, რომ

$$\int_a^b f^*(s,x)\,ds<+\infty, \text{ როცა } a<t<b,\ x>0.$$

ვიტყვით, რომ (1) განტოლებას დროითი ცვლადის მიმართ გააჩნია სინგულარობა $t=a$ წერტილში თუ

$$\int_a^b f^*(s,x)\,ds = +\infty \text{, როცა } x > 0 .$$

აღნიშნულ სინგულარობას ეწოდება ძლიერი თუ

$$\int_a^b s^{\mu} f^*(s,x)\,ds = +\infty \text{, როცა } x > 0 \text{ და } \mu > 0 .$$

ჩვენ მიერ დადგენილი დებულებები (1), (2) ამოცანის ამოხსნადობის შესახებ მოიცავს შემთხვევას, როცა (1) განტოლებას დროითი ცვლადის მიმართ $t = a$ წერტილში გააჩნია ძლიერი სინგულარობა.

(1) განტოლებასთან ერთად განვიხილოთ დამხმარე დიფერენციალური განტოლება

$$u^{(n)}(t) = \lambda(t) f\Big(t, u\big(\tau_1(t)\big), \ldots, u^{(n-1)}\big(\tau_n(t)\big)\Big), \tag{3}$$

სადაც $\lambda : [a,b] \to [0,1]$. ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციაა.

**თეორემა 1.** (აპრიორული შემოსაზღვრულობის პრინციპი). ვთქვათ, მოიძებნება ისეთი უწყვეტი ფუნქცია $\delta : [a,b] \to [0,+\infty[$, რომ $\delta(a) = 0$ და ყოველი უწყვეტი $\lambda : [a,b] \to [0,1]$ ფუნქციისთვის (3), (2) ამოცანის ნებისმიერი ამონასხნი აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\rho(t)\left|u^{(n-1)}(t)\right| \le \delta(t) \text{, როცა } a < t \le b$$

მაშინ (1), (2) ამოცანას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი

ეს თეორემა საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ (1), (2) ამოცანის ამოხსნადობის ეფექტური და გარკვეული აზრით არაგაუმჯობესებადი პირობები. ოღონდ ამ მიზნის მისაღწევად დაგვჭირდება დამატებით გამოვიკვლიოთ დიფერენციალური უტოლობა

$$\left|u^{(n)}(t)\right| \le \sum_{k=1}^{n} h_k(t)\left|u^{(k-1)}\big(\tau_k(t)\big)\right| + h_0(t) \tag{4}$$

(2) საწყისი პირობებით.

(4) უტოლობის კოეფიციენტები $h_k : ]a,b[ \to [0,+\infty[ \ \ (k = 0,\ldots,n)$ არის $[a+\varepsilon, b]$ შუალედში ინტეგრებადი ფუნქციები, ყოველი რაგინდ მცირე დადებითი $\varepsilon$-სთვის, $a$ წერტილში კი მათ საზოგადოთ აქვთ არაინტეგრებადი სინგულარობა.

ყოველი $m \in \{1,\ldots,n-1\}$ -თვის შემოვიღოთ ოპერატორი

$$q_m\left(h_1,...,h_n\right)(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{h_k(t)}{(n-k-1)!}\left|\int_t^{\tau_k(t)}\frac{(s-a)^{n-k-1}}{\rho(s)}ds\right|+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\left(\tau_k(t)-a\right)^{n-k}\left|h_k(t)\right|}{(n-k)!\rho\left(\tau_k(t)\right)},\text{ როცა } a<t<b.$$

სამართლიანია შემდეგი

**ლემა 1.** ვთქვათ, არსებობს $m\in\{1,...,n\}$, $\delta_0\in\,]0,1[$ და არაზრდადი უწყვეტი ფუნქცია $\gamma:[a,b]\to\,]0,+\infty[$ ისეთი, რომ

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\frac{(x-a)^{n-k}}{(n-k)!}h_k(x)dx\right)\le\frac{\rho(s)}{\rho(t)},\text{ როცა } a<s<t<b \tag{5}$$

და

$$\gamma(t)\int_a^t\frac{\rho(s)q_m\left(h_1,...,h_m\right)(s)}{\gamma\left(\tau_0(s)\right)}\le\delta_0,\text{ როცა } a<t\le b, \tag{6}$$

სადაც

$\tau_0(t)=\max\{t,\tau_1(t),...,\tau_n(t)\}$,

თუ გარდა ამისა

$\int_a^b\rho(s)h_0(s)ds<+\infty$

მაშინ (4), (2) ამოცანის ყოველი ამონახსნისათვის სამართლიანია შეფასება

$$\rho(t)\left|u^{(n-1)}(t)\right|\le\frac{\gamma(a)}{(1-\delta)\gamma(b)}\int_a^t\rho(s)h_0(s)ds,\text{ როცა } a<t\le b.$$

თეორემა 1-ისა და ლემა 1-ის საფუძველზე მტკიცდება

**თეორემა 2.** ვთქვათ, $]a,b[\times\mathbf{R}^n$ არეში სრულდება უტოლობა

$$\left|f\left(t,x_1,...,x_n\right)\right|\le\sum_{k=1}^{n}h_k(t)\left|x_k\right|+h_0(t), \tag{7}$$

სადაც $h_k:]a,b[\to]0,+\infty[$ $(k=0,...,n)$ არის $[a+\varepsilon,h]$ შუალედში ინტეგრებადი ფუნქციები ყოველი რაგინდ მცირე დადებითი $\varepsilon$-თვის, ხოლო $h_0$ არის წონით ინტეგრებადი ფუნქცია. ვთქვათ გარდა ამისა, მოიძებნება $\delta_0\in\,]0,1[$ და $m\in\{1,...,n-1\}$ ისეთი, რომ სრულდება (5) და (6) უტოლობები. მაშინ (1), (2) ამოცანას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი.

**შენიშვნა 1.** ამ თეორემაში პირობა $\delta \in ]0,1[$ არგაუმჯობესებადია და იგი არ შეიძლება შეიცვალოს პირობით $\delta_0 = 1$.

**თეორემა 3.** ვთქვათ,

$$\tau_k(t) \le t \text{, როცა } a < t < b \quad (k = 1,\dots,n) \tag{8}$$

და $]a,b[\times\mathbf{R}^n$ არეში სრულდება (8) უტოლობა, სადაც $h_k : ]a,b[ \to ]0,+\infty[ \ (k=1,\dots,n)$ არის $[a+\varepsilon, b]$ შუალედში ინტეგრებადი ფუნქციები ყოველი რაგინდ მცირე დადებითი $\varepsilon$-თვის, ხოლო $h_0$ არის $\rho$ წონით ინტეგრებადი ფუნქცია. ვთქვათ გარდა ამისა მოიძებნება $m \in \{1,\dots,n-1\}$ ისეთი, რომ სრულდება (5) უტოლობა და

$$\int_a^b \rho(s) q_m(h_1,\dots,h_n)(s)\, ds < +\infty\,, \tag{9}$$

მაშინ (1), (2) ამოცანას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი.

**შენიშვნა 2.** შენიშვნა 1-ის გამო ცხადია, რომ თუ დარღვეულია (8) პირობა, მაშინ (6) პირობის შეცვლა არ შეიძლება (9) პირობით.

(1), (2) ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხი როცა $\tau_i(t) \equiv t \quad (i=1,\dots,n)$ შესწავლილია (Agarwal, Kelevedjiev 2007; Bobisud, O`Regan 1988; Kiguradze 1965; Kiguradze 1965a; Kiguradze 1975) შრომებში. წრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის წონიანი ამოცანა ძლიერი სინგულარობით შესწავლილია (Kiguradze 2010; Sokhadze 2011; Sokhadze 2016) შრომებში.

(1), (2) ამოცანის ზოგიერთი კერძო შემთხვევისათვის, ამონახსნის ინტეგრალური წირების გამოყენებით შესაძლებელი ხდება საინჟინრო ტექნოლოგიური მიმართულებით სხვადასხვა აქტუალური პრობლემის გადაწყვეტა (Sokhadze 2018).

## ლიტერატურა

Agarwal, R.P. and P.S. Kelevedjiev. 2007. „Existence of solutions to a singular initial-volue problem“, *Acta Math. Sin* (Eng. Ser.) 23, N.10, 2007: 1797-1806.

Bobisud, L.E. and D. O`Regan. 1988. „Existence of solutions to some singular initial-value problems“, J. *Math. Anal. Appl*, 133, No1, 1988: 214-230.

Kiguradze, I.T. 1965. ,,On the Cauchy problem for ordinary differential equations with a singularity“. *Soobshch Akad. Nauk*. SSR, 37, 1965: 19-24.

Kiguradze, I.T. 1965a. ,,On the question of variability of solutions of nonlinear differential equations”. *Differ. Vravn*, 1, 1965: 995-1006.

Kiguradze. I.T. 1975. *Singular boundary-value problems for ordinary differential equations*, (Russian) *Tbilisi University Press. Tbilisi.*

Kiguradze, I.T. 2010. “Estimates for the Cauchy function of linear singular differential equations and some of thear applications”, *Differ. Uravn*, 46, No1, 2010: 29-46.

Sokhadze, Z. 2011. “The weighted Cauchy problem for linear functional differential equations with strong singularities”. *Georgian Math. J.* 18, No. 3, 2011: 577-586.

Sokhadze, Z. 2016. Weighted Cauchy problem for differential equations with deviating arguments. Journal of Matematical Scinces. V. 218, No 6, 2016: 834-838.

Sokhadze, Z. 2018. “Construction of the transverse-vertical shapes of the orthopedic Boot-Tree by means of the solution to singular differential equaishens” (with M. Shalamberidze, M. Tatvidze). *Bull. Georgian Natl. Acad. Sci. (N.S.)*, 12, no.1, 2018: 27-32.

## Computational Mathematics

### Solvability of the Weighted Initial Problem for the High-Order Non-Linear Functional- Differential Equations

**Zaza Sokhadze**
**Lamara Tsibadze**
lamara.tsibadze@atsu.edu.ge
Akaki Tsereteli State University
Kutaisi, Georgia

*The paper establishes the necessary and sufficient conditions for solvability of the weighted problem for the high-order nonlinear functional-differential equations.*

***Keywords***: *nonlinear singular differential equation with a delay, the Cauchy weighted problem, solvability.*

Let us consider the nonlinear functional-differential equation in the finite interval $[a,b]$ of the n-th order:

$$u^{(n)}(t)=f\left(t,u\left(\tau_1(t)\right),\dots,u^{(n-1)}\left(\tau_n(t)\right)\right) \qquad (1)$$

By weighted initial conditions,

$$\lim_{t\to a}\left(\rho(t)u^{(i-1)}(t)\right)=0 \qquad (i=1,\dots,n)\ , \qquad (2)$$

where the function $f:]a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ satisfies the Caratheodory's local conditions, $\tau_i:]a,b[\to]a,b[$ $\quad(i=1,\dots,n)$ are the measurable functions, while $\rho:]a,b]\to]0,+\infty[$ - is a continuous non-increasing function.

Note that $f^*(t,x)=\max\left\{\left|f(t,x_1,\dots,x_n)\right|:\sum_{i=1}^{n}|x_i|\le x\right\}$, when $a<t<b,\ x>0$. From here on we mean that $\int_a^b f^*(s,x)ds<+\infty$, when $a<t<b,\ x>0$.

Let us say that the equation (1) has singularity with respect to a time variable at a point if $\int_a^b f^*(s,x)ds=+\infty$, when $x>0$.

The mentioned singularity is called strong if $\int_a^b s^{\mu}f^*(s,x)ds=+\infty$, when $x>0$ and $\mu>0$.

The statements (1) and (2) that we established on solvability of the problem involve the case, when there is a strong singularity with respect to a time variable at a point $t=a$.

Along with the expresson (1), let us consider auxiliary dofferential equation

$$u^{(n)}(t)=\lambda(t)f\left(t,u\left(\tau_1(t)\right),\dots,u^{(n-1)}\left(\tau_n(t)\right)\right), \qquad (3)$$

where $\lambda:[a,b]\to[0,1]$ is any continuous function.

**Theorem 1.** (A priori Boundedness principle). Suppose that there can be found such continuous function $\delta:[a,b]\to[0,+\infty[$ that $\delta(a)=0$ and for every continuous function $\lambda:[a,b]\to[0,1]$ any solution to (3), (2) problem satisfies the inequality

$\rho(t)\left|u^{(n-1)}(t)\right| \le \delta(t)$, when $a < t \le b$

Then the problem (1), (2) has at least one solution.

This theorem allows us to determine the effective and, in a sense, non-improving conditions of solvability of the problem (1), (2). However, in order to achieve this, we will need to further study the differential inequality

$$\left|u^{(n)}(t)\right| \le \sum_{k=1}^{n} h_k(t)\left|u^{(k-1)}(\tau_k(t))\right| + h_0(t) \qquad (4)$$

with (2) initial conditions.

The coefficients $h_k : ]a,b[ \to [0,+\infty[ \ \ (k=0,\dots,n)$ of inequality (4) are the integrabl functions in the interval $[a+\varepsilon, b]$, for every however small positive $\varepsilon$, while at the point $a$ they genarally have non-integrable singularity.

For every $m \in \{1,\dots,n-1\}$ , let us introduce the operattor

$$q_m(h_1,\dots,h_n)(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{h_k(t)}{(n-k-1)!}\left|\int_t^{\tau_k(t)} \frac{(s-a)^{n-k-1}}{\rho(s)} ds\right| +$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{(\tau_k(t)-a)^{n-k}\left|h_k(t)\right|}{(n-k)!\,\rho(\tau_k(t))}, \text{ when } a < t < b.$$

The following is true

**Lemma 1.** Suppose that there exist $m \in \{1,\dots,n\}$, $\delta_0 \in ]0,1[$ and the non-increasing continuous function $\gamma : [a,b] \to ]0,+\infty[$ such that the

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{m} \int_s^t \frac{(x-a)^{n-k}}{(n-k)!} h_k(x)\,dx\right) \le \frac{\rho(s)}{\rho(t)}, \text{ when } a < s < t < b \qquad (5)$$

and

$$\gamma(t)\int_a^t \frac{\rho(s)\,q_m(h_1,\dots,h_m)(s)}{\gamma(\tau_0(s))} \le \delta_0, \text{ when } a < t \le b, \qquad (6)$$

where $\tau_0(t) = \max\{t, \tau_1(t),\dots,\tau_n(t)\}$, if in addition to this

$$\int_a^b \rho(s)\,h_0(s)\,ds < +\infty,$$

then for every solution of the (4), (2) problem the following estimate is valid

$$\rho(t)\left|u^{(n-1)}(t)\right| \le \frac{\gamma(a)}{(1-\delta)\gamma(b)}\int_a^t \rho(s)h_0(s)\,ds\text{, when } a<t\le b.$$

Based on Theorem 1 and Lemma 1, we shall prove

**Theorem 2.** Assume that in the range $]a,b[\times \square^n$, the following inequaliy holds

$$\left|f(t,x_1,\dots,x_n)\right| \le \sum_{k=1}^{n} h_k(t)|x_k| + h_0(t), \tag{7}$$

where $h_k : ]a,b[ \to ]0,+\infty[ \quad (k=0,\dots,n)$ are the integrable functions in the interval $[a+\varepsilon, h]$ for the however small positive $\varepsilon$, while $h_0$ is a weighted integrable function. Assume that in addition to this, there can be found $\delta_0 \in ]0,1[$ and $m \in \{1,\dots,n-1\}$ such that the inequalities (5) and (6) hold. Then, the problem (1), (2) has at least one solution.

**Remark 1.** In this theorem the condition $\delta \in ]0,1[$ is non-improving and it cannot be changed by the condition $\delta_0 = 1$.

**Theorem 3.** Let us assume that

$$\tau_k(t) \le t,\ \ a<t<b \quad (k=1,\dots,n) \tag{8}$$

and the inequality (8) holds in the range $]a,b[\times \mathbf{R}^n$, where $h_k : ]a,b[ \to ]0,+\infty[ \quad (k=1,\dots,n)$ are the integrable function in the range $[a+\varepsilon, b]$ for the every however small positive $\varepsilon$, while $h_0$ is a function integrable by the weight $\rho$. Let us assume that in addition, there can be found $m \in \{1,\dots,n-1\}$ such that the inequality (5) holds and

$$\int_a^b \rho(s) q_m(h_1,\dots,h_n)(s)\,ds < +\infty, \tag{9}$$

Then, the problem (1), (2) has at least one solution.

**Remark 2.** Due to Remark 1, it is clear that if the condition (8) is not met, then the condition (6) cannot be changed by the condition (9).

The question of the existence and uniqueness of solving the (1), (2) problem when $\tau_i(t) \equiv t \quad (i=1,\dots,n)$ was studied in (Agarwal, Kelevedjiev 2007; Bobisud, O`Regan 1988; Kiguradze 1965; Kiguradze 1965a; Kiguradze 1975) papers. The weighted problem for a system of linear differential equations with strong singularity was studied in (Kiguradze 2010; Sokhadze 2011; Sokhadze 2016) papers.

For some particular cases of the (1), (2) problem, it becomes possible to solve various current problems in the area of engineering technology by means of the integral curves of the solution (Sokhadze 2018).