ანალიზი

მახლობელ არეთა კვაზიკონფორმული ასახვების ერთი ამოცანის შესახებ

ლელა ზივზივაძე-ჯაფარიძე,
lela.japaridze@atsu.edu.ge
ერეკლე ჯაფარიძე
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო

ნაშრომში სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების მეთოდების გამოყენებით განიხილებიან მახლობელ არეთა კვაზიკონფორმული ასახვები ერთეულოვან წრეზე და დადგენილია შეფასებები რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ ვიმსჯელოთ სხვადასხვა სიდიდეების სიახლოვის შესახებ ε *–ის საშუალებით სადაც* $\varepsilon > 0$ *- ნამდვილი პარამეტრია რომელიც ახასიათებს არეთა სიახლოვეს. კერძოდ,* ε *–ის საშუალებით შეფასებულია მახლობელი არეების კვაზიკონფორმულად გადამსახველი ფუნქციების ასაგებად შედგენილი ინტეგრალური განტოლებების ამონახსნებისა და მათი წარმოებულების სხვაობა.*

საკვანძო სიტყვები: *ბელტრამის განტოლებათა სისტემა, მახლობელი არეები, კომპლექსური სიბრტყის ჰომეომორფიზმი, კვაზიკონფორმული ასახვა.*

შესავალი. მახლობელ არეთა კონფორმულ და კვაზიკონფორმულ ასახვებთან დაკავშირებული ამოცანები საკმაოდ აქტუალურია და გააჩნიათ მრავალრიცხოვანი გამოყენებები.პრაქტიკული ხასიათის მრავალი ამოცანის ამოხნის დროს ხშირად ვხვდებით ფუნქციებს რომლებიც განახორციელებენ არეთა კონფორმულ და კვაზიკონფორმულ ასახვებს ისე, რომ აღნიშნულ არეში ეს ფუნქციები აკმაყოფილებენ რომელიმე ელიფსურ განტოლებათა სისტემებს.ამიტომ მიზანშეწონილია ვიცოდეთ ასეთი ფუნქციების მიახლოებით და ეფექტურად აგების მეთოდები რომლებიც გადმოცემულია შრომებში (Вертгеим 1960, Фоминих 1974).

ზევრ ამოცანაში მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ თუ როგორ აისახება მოცემული არის საზღვრის მცირედი დეფორმაცია გადამსახავი ფუნქციის ფორმაზე როგორ იცვლება ამ დროს მისი კონსტრუქცია როგორც არეში ასევე არის საზღვარზე. მნიშვნელოვანი შედეგები ამ მიმართულებით მიღებულია შრომებში (Лаврентьев 1947, Samsonia, Samkharadze 1999).

აღვნიშნოთ, რომ ასეთი ტიპის ამოცანები იმ შემთხვევისათვის როცა როგორც გამოსავალი ასევე მახლობელი არეები წარმოადგენენ ვარსკვლვისებურ არეებს $z=0$ წერტილის მიმართ განხილულია ავტორთა შრომებში (Zivzivadze, Japaridze 2005, Zivzivadze, Japaridze 2006).

ძირითადი ცნებები და აღნიშვნები. კომპლექურ $\mathbb{C}$, $z=x+iy$ სიბრტყეში განვიხილოთ ცალადბმული $G,\ 0\in G$ არე შემოსაზღვრული ჩაკეტილი გლუვი Γ კონტურით რომლის პარამეტრული განტოლებებია:

$$t=t(\tau)=x(\tau)+iy(\tau),\qquad 0\le\tau\le 2\pi,\qquad t(0)=t(2\pi) \tag{2.1}$$

τ პარამეტრის ზრდას შეესაბამება $t=t(\tau)$ წერტილის მოძრაობა რომლის დროსაც Γ წირით შემოსაზღვრული არე რჩება ხელმარცხნივ. მასთან $x(\tau)$ და $y(\tau)$, 2π –პერიოდული ფუნქციებია.

ვთქვათ, Γ წირზე განსაზღვრულია $f(t)$ ფუნქცია, $t\in\Gamma$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $t=t(\tau)$ შეგვიძლია ეს ფუქცია განვიხილოთ როგორც τ ცვლადის ფუნქცია რომელიც ისევ $f(\tau)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. ვინაიდან $t(\tau)$ პერიოდულია ამიტომ ჩავთვალოთ,რომ $f(\tau)$ გაგრძელებულია მთელ წრფეზე პერიოდით 2π .

ვიტყვით, რომ f ფუნქცია მიეკუთვნება $C_\alpha[0;2\pi]$, $0<\alpha\le 1$,კლასს თუ ის $[0;2\pi]$ სეგმენტზე აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას α. მაჩვენებლით.თუ $f(\tau)$ და მისი წარმოებული $f'_\tau=f'(\tau)$ უწყვეტი არიან $[0;2\pi]$სეგმენტზე ვიტყვი,რომ f მიეკუთვნება $C'[0;2\pi]$ კლასს.თუ გარდა ამისა $f'_\tau\in C_\alpha[0;2\pi]$, $0<\alpha\le 1$ მაშინ დავწერთ,რომ $f\in C'_\alpha[0;2\pi]$.

$C'[0;2\pi], C_\alpha[0;2\pi]$ და $C'_\alpha[0;2\pi]$, $0<\alpha\le 1$ სივრცეები წარმოადგენენ ბანახის სივრცეებს (იხ.VekuaI.N.1988გვ.24) რომლებშიც ნორმები განისაზღვრებიან ასე:

$$\|f\|_{C'}=\|f\|_C+\|f'\|_C,\quad \|f\|_{C_\alpha}=\|f\|_C+H(f,\Gamma,\alpha),$$

$$\|f\|_{C'_\alpha}=\|f\|_{C'}+H(f'_\tau;\Gamma,\alpha),$$

სადაც $\|f\|_C$ და $H(f,\Gamma,\alpha)$ სიდიდეები განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$\| f \|_C = \sup_{\tau\in[0,2\pi]} | f(\tau) |, \qquad H(f,\Gamma,\alpha) = \sup_{\substack{\tau_1,\tau_2\in[0,2\pi] \\ \tau_1\neq\tau_2}} \frac{| f(\tau_1) - f(\tau_2) |}{| \tau_1 - \tau_2 |^{\alpha}}$$

ვიტყვით რომ Γ წირი რომელიც მოცემულია (2.1) განტოლებით,ეკუთვნის $C_\alpha^{'}$ კლასს,თუ .თუ $f(z)$ ფუნქცია $\overline{G}$ არეში აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას α, $0<\alpha\leq 1$ მაჩვენებლით მაშინ ჩავწერთ,რომ $f \in C_\alpha(\overline{G})$.

შემდგომში განვიხილავთ არეთა კონკრეტულ ოჯახებს რომლებიც გარკვეული აზრით მახლობელი არიან მოცემულ არეებთან.

განსაზღვრა: (Samsonia, Samkharadze 1999) დავუშვათ, ცალადბმული G, $0\in G$ არე შემოსაზღვრულია $\Gamma \in C_\alpha^{'}$, $0<\alpha\leq 1$ წირით და $\mathbb{C}$ სიბრტყეზე განვიხილოთ სხვა ცალადბმული $\tilde{G}$ არე, $\tilde{\Gamma}$ საზღვრით რომლის განტოლებაა

$$\tilde{t} = \tilde{t}(\tau) = \tilde{x}(\tau) + i\,\tilde{y}(\tau), \qquad 0 \leq \tau \leq 2\pi, \qquad \tilde{t}(0) = \tilde{t}(2\pi) \text{ და } \tilde{\Gamma} \in C_\alpha^{'}.$$

$\tilde{G}$ არეს ეწოდება G არის ε–მახლობელი $(0<\varepsilon<1)$ არე თუ შესრულებულია პირობები:

$$| t(\tau) - \tilde{t}(\tau) | \leq \varepsilon, \qquad \tau \in [0,2\pi], \qquad \| t' - \tilde{t}' \|_{C_\alpha} \leq \varepsilon, \quad 0<\alpha\leq 1 \qquad (2.2.)$$

ნებისმიერი $\varepsilon \in (0,1)$ რიცხვისათვის მოგვეცემა G არის ε–მახლობელი არეების უსასრულო სიმრავლე რომელც $\Omega(G,\varepsilon)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ვთქვათ, G_0 ცალადბმული არეა $\mathbb{C}$ სიბრტყეზე ისეთი, რომ $\partial G_0 = \Gamma_0 \in C_\alpha^{'}$ $(0<\alpha\leq 1)$, $G \subset G_0$ და ნებისმიერი $\tilde{G} \in \Omega(G;\varepsilon)$, მახლობელი არისათვის $\tilde{G} \subset G_0$.

კომპლექსურ $\mathbb{C}$ სიბრტყეში განვიხილოთ ბელტრამის განტოლებათა სისტემა კომპლექსური ფორმით

$$\omega_{\bar{z}} = q(z)\,\omega_z \qquad (2.3.)$$

იმ დაშვებით,რომ $| q(z) | \leq Q_0 < 1$, $\quad q \in C_\gamma^{'}(\overline{G_0})$, $\quad 0<\gamma\leq 1$ როცა, $z \in \overline{G_0}$ და $q(z) = 0$ როცა $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{G_0}$ სადაც

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} - i\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) \qquad \omega_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + i\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)$$

დავუშვათ, W წარმოადგენს (2,3) სისტემის ამონახსნს რომელსაც კომპლექსური $\mathbb{C}$ სიბრტყის გლობალური ჰომეომორფიზმი უწოდოთ. იგი აიგება ი. ნ. ვეკუას (Vekua 1988/2) სქემის მიხედვით და განახორციელებს კომპლექსური $\mathbb{C}$ სიბრტყის თავის თავზე ჰომეომორფიზმს მასთან $W(0)=0,\quad W(\infty)=\infty,\quad z^{-1}W(z)\to 1$ როცა $|z|\to\infty$ და თანახმად (Manjavidze G.F.)–ისა

$$W,\quad W_z, W_{\bar{z}} \in C_{\gamma_0}\left(\overline{G_0}\right) \text{ სადაც } 0<\gamma_0<\min\{\alpha,\gamma\}. \qquad (2.4)$$

$W(z)$ ჰომეომორფიზმი ცნობილია (2.3) განტოლებათა სისტემის ძირითადი ჰომეომორფიზმის სახელწოდებით.

კოშის ტიპის ინტეგრალი $\mu\in C_\alpha[0,2\pi], 0<\alpha\le 1$, სიმკვრივით Γ წირის გასწვრივ და მისი შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალი $t(\tau)\in\Gamma$ წერტილში აღინიშნებიან ასე:

$K_\Gamma(\mu,z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)dt}{t-z}(z\in$ [redacted] $(\mu,t) = S_\Gamma(\mu,t(\tau)) =$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu[t(\sigma)]-\mu[t(\tau)]}{t(\sigma)-t(\tau)}dt(\sigma) = \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_\eta}\frac{\mu[t(\sigma)]-\mu[t(\tau)]}{t(\sigma)-t(\tau)}dt(\sigma)$$

$\sigma\in[0,2\pi]$

სადაც $\Gamma_\eta = \{z : |z-t(\tau)|<\eta\}\bigcap\Gamma$ აღნიშნავს Γ წირის ნაწილს რომელიც მოქცეულია $|z-t(\tau)|<\eta$ წრის შიგნით.

თუ $\mu\in C'_\alpha[0,2\pi]$, $0<\alpha\le 1$ მაშინ (იხ.Гахов Ф.Д. 1963 , გვ. 49)

$$\frac{dS_\Gamma(\mu,t(\tau))}{dt(\tau)} = S_\Gamma(\mu'_t,t(\tau)). \qquad (2.5)$$

თუ Γ მოცემული გლუვი ჩაკეტილი წირია,არსებობს რიცხვი R_Γ (იხ. Мусхелишвили 1982: 13), რომელიც არ არის დამოკიდებული Γ წირის წერტილებზე ,ისეთი ,რომ ნებისმიერი $t=t(\tau)\in\Gamma,\qquad 0\le\tau\le 2\pi$ წერტილისათვის ნებისმიერი წრეწირი რადიუსით $r\le R_\Gamma$ და ცენტრით $t(\tau)$ წერტილში, Γ წირს კვეთს მხოლოდ ორ წერტილში. R_Γ–ს ეწოდება სტანდარტული რადიუსი.წრეს $\{z : |z-t|<R_\Gamma\}$, $t\in\Gamma$ რომელიც Γ წირს კვეთს ერთადეთ $l(t)=\{z : |z-t|<R_\Gamma\}\bigcap\Gamma$

რკალზე,სტანდარტული წრე ეწოდება, ხოლო $l(t)$ რკალს სტანდარტული რკალი ცენტრით $t \in \Gamma$ წერტილში.

როგორც ცნობილია (იხ. Мусхелишвили 1982: 523-525), თუ Γ გლუვი ჩაკეტილი წირია,მაშინ ნებისმიერი $t_1, t_2 \in \Gamma$ წერტილებისათვის გვაქვს

$$|t_1 - t_2| \geq k_0 s(t_1, t_2) \qquad (2.6)$$

სადაც $s(t_1, t_2)$ არის Γ წირის იმ უმცირესი რკალის სიგრძე რომლის ბოლოებია t_1 და t_2 ხოლო k_0, $0 < k_0 < 1$ დადებითი მუდმივია, რომელიც არ არის დამოკიდებული Γ წირზე t_1 და t_2 წერტილების განლაგებაზე. აღვნიშნოთ ასევე ისიც, რომ ნებისმიერი $t \in \Gamma$ წერტილისათვის $l(t)$ სტანდარტული რკალის სიგრძე ნაკლებია რიცხვზე $\frac{1}{2}|\Gamma|$, სადაც $|\Gamma|$ აღნიშნავს Γ წირის სიგრძეს (იხ. Мусхелишвили 1982: 523-525).

ამ პუნქტის ბოლოს შევთანხმდეთ და შემდგომ მსჯელობებში ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha, \gamma \in (0,1]$, ხოლო M მუდმივი, რომელიც მაგალითად დამოკიდებულია G არეზე,W ჰომომორფიზმზე და ჰელდერის α მაჩვენებელზე და არ არის დამოკიდებული ε – ზე,სადაც $\varepsilon > 0$ ნამდვილი პარამეტრია, რომელიც ახასიათებს არეების სიახლოვეს, აღინიშნება, ასე $M = M(G, W, \alpha)$.

ზოგიერთი ცნობები კვაზიკონფორმულ ასახვათა თეორიიდან. მოვიყვანოთ ცნობილი შედეგები კვაზიკონფორმულ ასახვათა თეორიიდან და, ასევე, ზოგიერთი დამხმარე ფორმულები და წინადადებები, რომლებიც გამოიყენებიან შემდგომ მსჯელობებსა და დამტკიცებებში.

ვიტყვით, რომ კომპლექსური $\omega = f(z)$ ფუნქცია განახორციელებს ცალადბმული G არის ერთეულოვან $|\omega| < 1$ წრეზე (2.3) სისტემის შესაბამის კვაზიკონფორმულ ასახვას თუ ω ჰომომორფულად ასახავს G არეს $|\omega| < 1$ წრეზე და აკმაყოფილებს (2.3) პირობას.

ნაშრომში (Kveselava, Samsonia 1980) დამუშავებულია ბელტრამის (2.3) სისტემის შესაბამისი ცალადბმული და მრავლადბმული არეების კვაზიკონფორმული ასახვების აგების კონსტრუქციული მეთოდები. ასეთ კონსტრუქციებში საკვანძო როლს თამაშობს (2.3) სისტემის W ჰომეომორფიზმი. ასეთი ასახვების გაცნობის მიზნით დავიწყოთ იმით, რომ (Kveselava, Samsonia 1980)-ის თანახმად, შემდეგი ინტეგრალით წარმოდგენადი ფუნქცია

$$K_{\Gamma}\left(\varphi,W,z\right)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)dW(t)}{W(t)-W(z)} \qquad \left(z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma\right) \qquad (3.1.)$$

სადაც $dW\left(t\right)=W_{t}dt+W_{\bar{t}}d\bar{t}$ ხოლო $\varphi\left(t\right)$, ჰელდერის აზრით, უწყვეტი ფუნქციაა, წარმოადგენ (2.3) სისტემის ამონახსნს G არეში, ხოლოა $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ არეში კი ჰოლომორფულ ფუნქციას, მასთან $K_{\Gamma}\left(\varphi,W,\infty\right)=0$.

(3.1) ინტეგრალს შეიძლება მივცეთ აზრი იმ შემთხვევაშიც როცა წერტილი მდებარეობს Γ წირზე. დაუშვათ

$$\begin{aligned} &s=s\left(\tau\right)=W[t(\tau)], \qquad 0\le\tau\le2\pi, \qquad s(0)=s(2\pi)\\ &\tilde{s}=\tilde{s}\left(\tau\right)=W[\tilde{t}\left(\tau\right)], \qquad 0\le\tau\le2\pi, \qquad \tilde{s}\left(0\right)=\tilde{s}\left(2\pi\right)\end{aligned} \qquad (3.2)$$

წარმოადგენენ $L=W\left(\Gamma\right)$ და $\tilde{L}=W(\tilde{\Gamma})$ წირების განტოლებებს შესაბამისად.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყოველ $t\in\Gamma$ წერტილში W გარდაქმნის იაკობიანი განსხვავდება ნულისაგან $J=|W_{t}|^{2}-|W_{\bar{t}}|^{2}>0$ (იხ.Vekua 1988: 81), მაშინ $s'\left(\tau\right)=W_{t}t'(\tau)+W_{\bar{t}}\bar{t}'(\tau)$ ტოლობიდან და (2.4) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ Γ–ს სახე W ასახვისას ისევ $C'_{\gamma0}$ კლასის წირია ანუ

$$s,\tilde{s}\in C'_{\gamma0}[0,2\pi], \qquad (3.3)$$

სადაც γ_{0} (2.4) პირობაში მონაწილე მუდმივია $0<\gamma_{0}<\min\{\alpha,\gamma\}$.

დაუშვათ $z\in\bar{\Gamma}$. მასშინ $W\left(z\right)\in\bar{L}$ და (3.1)–დან ვღებულობთ

$$K_{\Gamma}\left(\varphi,W,z\right)=K_{L}\left(h;W\left(z\right)\right), \qquad (3.4)$$

სადაც

$$h(s)=h[s(\tau)]=\left(\varphi\cdot W^{-1}\right)[s(\tau)]=\varphi[t(\tau)] \qquad \tau\in[0,2\pi], \qquad (3.4')$$

ხოლო $K_{L}\left(h;W\left(z\right)\right)$ ინტეგრალი არის კოშის ტიპის ინტეგრალი h სიმკვრივით L წირის გასწვრივ. ამიტომ (3.1) ფუნქციას შემდგომში გამოვიყენებთ კოშის ტიპის ინტეგრალის ანალოგად ბელტრამის სისტემისათვის.

ფიქსირებული $t\left(\tau\right)\in\Gamma$ წერტილისათვის განვიხილოთ სიმრავლეები

$\Gamma_{\delta}\left(t\right)=\left\{t\left(\sigma\right)\in\Gamma;\quad 0\le\sigma\le\tau-\delta \text{ ან } \tau+\delta\le\sigma<2\pi\right\}$

როცა $t \neq t(0)$ (3.5)

და

$\Gamma_\delta(0) = \{t(\sigma) \in \Gamma; \quad \delta \le \sigma \le 2\pi - \delta\}$

როცა $t = t(0) = t(2\pi)$ (3.5')

სადაც $0 < \delta \le \min\{\tau, 2\pi - \tau\}$. W ასახვის ჰომეომორფულობის გამო ნებისმიერი $t(\tau) \in \Gamma$ წერტილისათვის გვექნება $W[\Gamma_\delta(t)] = L_\delta[W(t)] = L_\delta(s)$.ვინაიდან L გლუვი წირია და h უწყვეტია ჰელდერის აზრით L წირზე ამიტომ ნებისმიერ $s = s(\tau) \in L,\quad 0 \le \tau \le 2\pi$ წერტილში არსებობს სინგულარული ინტეგრალი $S_L(h,s)$ სადაც h (3.4') ფორმულით განსაზღვრული ფუნქციაა და მარტივად ვაჩვენებთ, რომ ეს ინტეგრალი ემთხვევა ზღვარს

$$S_L(h;s) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{L_\delta(s)} \frac{h[s(\sigma)] - h[s(\tau)]}{s(\sigma) - s(\tau)} ds(\sigma)$$

მაშინ ტოლობიდან

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_\delta(t)} \frac{\varphi[t(\sigma)] - \varphi[t(\tau)]}{W[t(\sigma)] - W[t(\tau)]} dW[t(\sigma)] = \frac{1}{\pi i} \int_{L_\delta(s)} \frac{h[s(\sigma)] - h[s(\tau)]}{s(\sigma) - s(\tau)} ds(\sigma),$$

$(s = W(t))$

გამომდინარეობს, რომ Γ წირის ყოველ $t = t(\tau)$ წერტილში არსებობს (3.1) სისტსმის შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალი

$$S_\Gamma(\varphi, W, t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_\delta(t)} \frac{\varphi[t(\sigma)] - \varphi[t(\tau)]}{W[t(\sigma)] - W[t(\tau)]} dW[t(\sigma)] = S_L(h, s) \quad (3.6)$$

და ადგილი აქვს ფორმულებს:

$$\begin{aligned} K_\Gamma^+(\varphi, W, t) &= \lim_{z \to t} K_\Gamma(\varphi, W, z) = 2\varphi(t) + S_\Gamma(\varphi, W, t), \qquad (z \in G) \\ K_\Gamma^-(\varphi, W, t) &= \lim_{z \to t} K_\Gamma(\varphi, W, z) = S_\Gamma(\varphi, W, t), \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

როგორც აღინიშა, ნაშრომში (Kveselava, Samsonia 1980) აგებულია ფუნქცია, რომელიც კვაზიკონფორმულად ასახავს ცალადბმულ G $(0 \in G)$ არეს ერთეულოვან წრეზე. ასეთი ფუნქციის აგება ხორციელდება იმ დაშვებით, რომ ბელტრამის (2.3) განტოლების კოეფიციენტი მიეკუთვნება $C'_\gamma\left(\overline{G_0}\right)$, კლასს და აქვს სახე (იხ. Kveselava, Samsonia 1980)

$$f(z)=W(z)\exp\left\{K_{\Gamma}(\lambda,W,z)+ic\right\},\qquad (z\in G) \qquad (3.8)$$

$f(0)=0,\quad f(z_1)=1$ (z_1, Γ წრის ნებისმიერი წერტილია) სადაც ნამდვილი λ ფუნქცია წარმოადგენს შემდეგი ინტეგრალური განტოლების ამონახსნს

$$\lambda[t(\tau)]+\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\lambda[t(\sigma)]dW[t(\sigma)]}{W[t(\sigma)]-W[t(\tau)]}=-\ln W[t(\tau)],\qquad \sigma\in\left[0,2\pi\right], \quad (3.9)$$

ხოლო c მუდმივი გამოითვლება ფორმულით

$$c=-\arg W(z_1)-\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\lambda[t(\tau)]d\left[\ln|W[t(\tau)]-W(z_1)|\right], \qquad (3.10)$$

სადაც $\arg W(z_1)$ აღნიშნავს $W(z_1)$ წერტილის არგუმენტის მთავარ მნიშვნელობას, რომელიც მიეკუთვნება $[0,2\pi)$ შუალედს.

(3.9) განტოლება წარმოადგენს ფრედგოლმის განტოლებას, რომლის მარჯვენა მხარე მიეკუთვნება $C'_{\gamma 0}\left[0,2\pi\right],\ 0<\gamma_0<\min\{\alpha,\gamma\}$ კლასს, რომლის შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი $\lambda(t)\equiv 0$. ამიტომ (3.9) განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი λ (იხ. Kveselava, Samsonia 1980).

ანალოგიურად აიგება ფუნქცია

$\tilde f$ [redacted] $z)\exp\{K_{\tilde\Gamma}(\tilde\lambda,W,z)+i\tilde c\},\qquad (z\in\tilde G),\quad (3.11)$

რომელიც $\tilde G\in\Omega(G,\varepsilon)$ არეს ასახავს ერთეულოვან წრეზე პირობებით

$\tilde f(0)=0$, $\tilde f(\tilde z_1)=1$ ($\tilde z_1$, $\tilde\Gamma$ წრის ნებისმიერი წერტილია) $\tilde\lambda$ წარმოადგენს ფრედგოლმის ტიპის ინტეგრალური განტოლების ერთადერთ ამონახსნს

$$\tilde\lambda[\tilde t(\tau)]+\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\tilde\Gamma}\frac{\tilde\lambda[\tilde t(\sigma)]dW[\tilde t(\sigma)]}{W[\tilde t(\sigma)]-W[\tilde t(\tau)]}=-\ln|W[\tilde t(\tau)]|,\quad \sigma\in\left[0,2\pi\right] \quad (3.12)$$

სადაც $\tilde\Gamma\in C'_{\alpha}$, და

$$\tilde c=-\arg W(\tilde z_1)-\frac{1}{\pi}\int_{\tilde\Gamma}\tilde\lambda[\tilde t(\tau)]d[\ln|W[\tilde t(\tau)]-W(\tilde z_1)|] \qquad (3.13)$$

ინტეგრალურ განტოლებათა ამონახსნებისა და მათი წარმოებულების სხვაობების შეფასება. მახლობელი არეების კონფორმული ასახვების შესწავლის დროს (იხ. Samsonia, Samkharadze

1999; Zivzivadze, Japaridze 2005; Zivzivadze, Japaridze 2006) გვხვდებიან შემდეგი ინტეგრალური განტოლებები

$$\varphi\left[t(\tau)\right]+\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi[t(\sigma)]dt(\sigma)}{t(\sigma)-t(\tau)}=-\ln|t(\tau)|,\qquad t\in\Gamma \tag{4.1}$$

$$\tilde{\varphi}[\tilde{t}(\tau)]+\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}}\frac{\tilde{\varphi}[\tilde{t}(\sigma)]d\tilde{t}(\sigma)}{\tilde{t}(\sigma)-\tilde{t}(\tau)}=-\ln|\tilde{t}(\tau)|,\qquad \tilde{t}\in\tilde{\Gamma} \tag{4.2}$$

რომლებიც შედგენილი არიან G და $\tilde{G}$ არეებისათვის შესაბამისად, სადაც $\Gamma,\tilde{\Gamma}\in C_{\alpha}^{'}$ ხოლო φ და $\tilde{\varphi}$ საძიებელი ნამდვილი ფუნქციებია. ეს განტოლებები, რომელთა მარჯვენა მხარეები მიეკუთვნებიან $C_{\alpha}^{'}[0,2\pi]$ კლასს, წარმოადგენენ ფრედჰოლმის ტიპის განტოლებებს (იხ. Мусхелишвили 1982: 226-231) და გააჩნიათ ერთად–ერთი ამონახსნი. ამ ამონახსნების საშუალებით აიგებიან გადამსახველი ფუნქციები. (3.9) და (3.12) განტოლებების ამონახსნების წარმოებულების სხვაობის შეფასების მიზნით ჩვენ გამოვიყენებთ თეორემას ნაშრომიდან (Samsonia, Samkharadze 1999).

თეორემა 4.1. (Samsonia, Samkharadze 1999) არსებობს $a_0(G)=a_0\in(0,1)$ მუდმივი ისეთი,რომ თუ G და $\tilde{G}\in\Omega(G,\varepsilon)$, $0<\varepsilon\le a_0$ არეების Γ და $\tilde{\Gamma}$ საზღვრები მიეკუთვნებიან $C_{\alpha}^{'}$, კლასს მაშინ სამართლიანია შეფასება

$$\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C_{\alpha-\beta}}\le A_0\left(G_0,\beta\right)\|\varphi\|_{C_{\alpha-\beta}}\cdot\varepsilon, \tag{4.3.}$$

სადაცгде φ და $\tilde{\varphi}$ (4.1) და (4.2) განტოლებების ერთადერთი ამონახსნებია, ხოლო β კი α–ზე ნაკლები ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

გვინდა, რომ (3.9) და (3.12) განტოლებების ამონახსნებისა და მათი წარმოებულების სხვაობებისათვის მივიღოთ (4.3) ტიპის შეფასებები.

ამ მიზნით, განვიხილოთ ფრედჰოლმის ტიპის ინტეგრალური განტოლებები:

$$\phi\left[t(\tau)\right]+\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{0}^{2\pi}\frac{t'(\tau)\phi(\sigma)d\sigma}{t(\sigma)-t(\tau)}=-\left(\ln|t|\right)_{\tau}^{'} \tag{4.1'}$$

$$\tilde{\phi}[\tilde{t}(\tau)] + \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\tilde{t}'(\tau)\tilde{\phi}(\sigma)d\sigma}{\tilde{t}(\sigma)-\tilde{t}(\tau)} = -(\ln|\tilde{t}|)_\tau' \qquad (4.2')$$

რომლებიც შედგენილი არიან G და $\tilde{G}\in\Omega(G,\varepsilon)$ არეებისათვის და რომელთა თავისუფალი წევრები მიეკუთვნებიან $C_\alpha[0,2\pi]$ კლასს, სადაც $\phi[t(\tau)]=\phi(\tau)$ და $\tilde{\phi}[\tilde{t}(\tau)]=\tilde{\phi}(\tau)$, $C_\alpha[0,2\pi]$ კლასის საძიებელი ფუნქციებია.

დაუშვათ, $\phi_0[t(\tau)]=\phi_0(\tau)$ უწყვეტი ფუნქცია წარმოადგენს (4.1') განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნია ანუ

$$\phi_0\left[t(\tau)\right] + \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{t'(\tau)\phi_0(\sigma)d\sigma}{t(\sigma)-t(\tau)} = 0 \qquad (4.4.)$$

F_0 იყოს ϕ_0 ფუნქციის პირველყოფილი $(F_0[t(\tau)])_\tau' = \phi_0(\tau)$. მაშინ (2.5)–ის გათვალისწინებით (4.4) ჩაიწერება ასე

$$\left(F_0[t(\tau)] + \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{F_0[t(\sigma)]}{t(\sigma)-t(\tau)}dt(\sigma)\right)_\tau' = 0$$

უკანასკნელის გათვალისწინებით გვექნება

$$F_0(t) + \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{F_0[t(\sigma)]}{t(\sigma)-t(\tau)}dt(\sigma) = const$$

რომლიდანაც გამომდინარეობს, რომ სამართლიანია ტოლობა

$$F_0(t) - C + \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{F_0[t(\sigma)]-C}{t(\sigma)-t(\tau)}dt(\sigma) = 0 \qquad (4.5)$$

სადაც - C ნამდვილი მუდმივია.

(4.5.) პირობა აღნიშნავს, რომ, $F_0(t)-C$ ფუნქცია სადაც C ნამდვილი ფუნქციაა, წარმოადგენს (4.1.) განტოლების შესაბამისი ინტეგრალური განტოლების ამონახსნს. მაგრამ ასეთ ერთგვაროვან განტოლებას გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი (იხ. Мусхелишвили 1982: 227-230). ე.ი. $F_0(t)=const$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\phi_0(t)\equiv 0$ ანუ (4.1'.) განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. შესაბამისად (4.1'.) განტოლებას გააჩნია $C_\alpha[0,2\pi]$ კლასის ერთად–ერთი ამონახსნი (იხ. Мусхелишвили 1982: 227). ანალოგიური შედეგები სამართლიანია (4.2'.) განტოლებისთვისაც.

ამრიგად (4.1'.) და (4.2'.) განტოლებებს გააჩნიათ $C_\alpha[0,2\pi]$ კლასის ერთად–ერთი ამონახსნი.

დაუშვათ, $\varphi,\phi \in C_\alpha[0,2\pi]$ ფუნქციები წარმოადგენენ (4.1) და (4.1') განტოლებების ამონახსნებს შესაბამისად. ვთქვათ, $(F[t(\tau)])_\tau^{'} = \phi(\tau)$, მაშინ, თუ გავიხსენებთ ზემოთ ჩატარებულ მსჯელობებს, მივიღებთ, რომ $F[t(\tau)] - const$ სახის ფუნქცია წარმოადგენს (4.1.) განტოლების ამონახნს. ვინაიდან ამ უკანასკნელს გააჩნია ერთადერთი φ ამონახსნი, ამიტომ $\varphi[t(\tau)] = F[t(\tau)] - const$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\varphi \in C_\alpha^{'}[0,2\pi]$ და $\varphi_\tau^{'}$ წარმოადგენს (4.1') განტოლების ერთადერთ ამონახსნს. ანალოგიურად ვღებულობთ, რომ $\tilde{\varphi} \in C_\alpha^{'}[0,2\pi]$ დაფუნქცია $\tilde{\varphi}'_\tau$ წარმოადგენს (4.2') განტოლების ერთადერთ ამონახსნს.

ამრიგად (4.1) и (4.2) განტოლებებს გააჩნიათ ერთადერთი ამონახსნები $\varphi,\tilde{\varphi} \in C_\alpha^{'}[0,2\pi]$, ხოლო $\varphi_\tau^{'}$ და $\tilde{\varphi}'_\tau$ წარმოადგენენ (4.1') და (4.2') განტოლებების ამონახსნებს. თუ შევნიშნავთ, რომ (4.1') და (4.2') განტოლებების მარჯვენა მხარეები საკმაოდ მცირე ε რიცხვისათვის ახლოს არიან ერთმანეთთან $C_\alpha[0,2\pi]$ სივრცის აზრით და გამოვიყენებთ 4.1. თეორემის დამტკიცებას (Samsonia, Samkharadze 1999)–დან შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია

თეორემა 4.2. არსებობს $a_1(G) = a_1 \in (0,1)$ მუდმივი ისეთი, რომ თუ G და $\tilde{G} \in \Omega(G,\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \le a_1$ არეების Γ და $\tilde{\Gamma}$ საზღვრები მიეკუთვნებიან $C_\alpha^{'}$ კლასს, მაშინ სამართლიანია შეფასებები

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C_{\alpha-\beta}} \le A_2(G,\beta)\|\varphi\|_{C_{\alpha-\beta}}\,\varepsilon, \quad \|\varphi' - \tilde{\varphi}'\|_{C_{\alpha-\beta}} \le A_2(G,\beta)\|\varphi'\|_{C_{\alpha-\beta}}\,\varepsilon, \tag{4.6}$$

სადაც, φ და $\tilde{\varphi}$ (4.1) და (4.2) განტოლებების ერთადერთი ამონახსნებია ხოლო β, α–ზე ნაკლები ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

ახლა შევაფასოთ (3.9) და (3.12) ინტეგრალური განტოლებების ამონახსნების სხვაობა. ნაშრომში (Samsonia Z.V. Samkharadze I.G. 1999) ნაჩვენებია ასეთი შეფასებები

$$\begin{aligned} &|s(\tau) - \tilde{s}(\tau)| \le B_0(G,W)\varepsilon^{\gamma_0/2}, \\ &\tau \in [0,2\pi], \quad \|s' - \tilde{s}'\|_{C_{\gamma_0/2}} \le B_0(G,W)\varepsilon^{\gamma_0/2}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

სადაც γ_0, $0<\gamma_0<\min\{\alpha,\gamma\}$ არის კონსტანტა (2.4)–დან.

ამ უტოლობებიდან ვასკვნით, რომ მახლობლობის (2.2) პირობა G და $\tilde{G}$ არეებისათვის და მათი Γ და $\tilde{\Gamma}$ საზღვრებისათვის შესაბამისი $W(G)$ და $W(\tilde{G})$ არეებისათვის და $L=W(\Gamma)$ და $\tilde{L}=W(\tilde{\Gamma})$ საზღვრებისათვის შეიცვლება (4.7) პირობით.

(3.6)–ის გავითვალისწინებთ (3.9) და (3.12) განტოლებები ჩავწეროთ ასე

$$h\left[s(\tau)\right]+\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{h[s(\sigma)]ds(\sigma)}{s(\sigma)-s(\tau)}=-\ln|s(\tau)|,\qquad s\in L \tag{4.8}$$

$$\tilde{h}[\tilde{s}(\tau)]+\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\tilde{L}}\frac{\tilde{h}[\tilde{s}(\sigma)]d\tilde{s}(\sigma)}{\tilde{s}(\sigma)-\tilde{s}(\tau)}=-\ln|\tilde{s}(\tau)|,\qquad \tilde{s}\in\tilde{L} \tag{4.9}$$

სადაც $h(s)$ ფუნქცია განისაზღვრება (3.4') პირობიდან.

ეს განტოლებები წარმოადგენენ (4.1) და (4.2) ტიპის განტოლებებს რომლებიც შედგენილი არიან $W(G)$ და $W(\tilde{G})$, $\tilde{G}\subset\Omega(G,\varepsilon)$, არეებისათვის $L,\ \tilde{L}\in C'_{\gamma 0}$ საზღვრებით და გააჩნიათ ერთად–ერთი ნამდვილი ამონახსნები $\lambda,\tilde{\lambda}\in C'_{\gamma 0}[0,2\pi]$ $0<\gamma_0<\min\{\alpha,\gamma\}$, (რომლებიც წარმოადგენენ ასევე (3.9) და (3.12) განტოლებების ერთად–ერთ ამონახსნებს). ამ ამონახსნებისათვის სამართლიანია თეორემა 4.2. ამრიგად თუ G და $\tilde{G}$ ε მახლობელი არეები არიან (2.2) აზრით, მაშინ $W(G)$ და $W(\tilde{G})$ მახლობელი არიან (4.7) აზრით. ამის გამო 4.2 თეორემიდან გამომდინარეობს

თეორემა 4.3. არსებობს $a_2(G;W)=a_2\in(0,1)$ რიცხვი ისეთი,რომ თუ G და $\tilde{G}\in\Omega(G,\varepsilon)$, $0<\varepsilon\le a_2$ არეები, რომელთა საზღვრები მიეკუთვნებიან C'_{α} კლასს ε მახლობელი არიან (2.2) აზრით, მაშინ სამართლიანია შეფასებები:

$$\| \lambda - \tilde{\lambda} \|_{C_{\frac{\gamma_0}{2}-\beta}} \leq B_1\left(G,W,\beta\right) \| \lambda \|_{C_{\frac{\gamma_0}{2}-\beta}} \cdot \varepsilon^{\gamma_0/2},$$

$$\| \lambda' - \tilde{\lambda}' \|_{C_{\frac{\gamma_0}{2}-\beta}} \leq B_1\left(W,G,\beta\right) \| \lambda' \|_{C_{\frac{\gamma_0}{2}-\beta}} \cdot \varepsilon^{\gamma_0/2} \qquad (4.10)$$

სადაც λ и $\tilde{\lambda}$ წარმოადგენენ (3.9) და (3.12) განტოლებების ერთადერთ ამონახსნებს შესაბამისად, γ_0 არის ნამდილი მუდმივა (2.4)–დან,

ლიტერატურა

Kveselava, D.A., Samsonia, Z.V. 1980. "On the quasiconformal mapping of domains. Metrich". *Voprosi Teorii Funktsii (Metric Problems of Function Theory).* Kiev: Naukova Dumka1980: 53-65.

Manjavidze, G.F. 1967. *A boundary value problem of linear conjugation with displacement and its relation to the theory of generalized analitic functions.* Trans. Tbil. Math. Inst. 33, 1967: 82-87.

Samsonia, Z.V. Samkharadze, I.G. 1999. "On quasiconformal mapping corresponding to the Beltrami equation". *Ukrainian Math. Journal.* vol. 51, N10. 1999.

Vekua, I.N. 1988 . *Generalized analytic functions.* Moscow: Nauka.

Zivzivadze, L. Japaridze, E. 2005. "On estimation of exactnes in conformal mappings of neighbouring domains". *Bull. Georg. Acad. Sci.* Vol. 171, N3, 2005: 420-424.

Zivzivadze, L. Japaridze, E. 2006. "On Approximation of Functions Mapping Conformally Neighbouring Domains". *Bull. Georg. Acad Sci.* Vol. 174, N2, 2006: 215-219.

Батырев, А.В. 1960. "Конформные отображения близких областей''. Сборник *Исследоавние по современным проблемам теории функции комплексного переменного.* М. Физматгиз 1960: 358-365.

Вертгеим, Б.А. 1960. "Приближенное построение некоторых квазиконформных отображений". Сб.: *Исследование по современным проблемам теории функции комплексного переменного.* М. Физматгиз, 1960: 519-585.

Гахов, Ф. Д. 1963. *Краевые задачи.* Москва: Государственное издателство физико-математической литературы.

Лаврентьев, М.А. 1947. *Общая теория квазиконформных отображений плоских областей.* Мат. сб. Т. 21 (69), 1947: 285-320.

Мусхелишвили, Н.И. 1982. *Сингулярные интегральные уравнения.* Тбилиси: "Мецниереба". 1982.

Фоминих, Ю.Ф. 1974. “Приближенные квазиконформные отображения”. Сб.: *Метрические вопросы теории функции и отображения.* Киев, 1974: 146-164.

Analysis

One Problem of Quasiconformal Mapping of Close Domains

Lela Zivzivadze-Japaridze
lela.japaridze@atsu.edu.ge
Erekle Japaridze
Akaki Tsereteli State University
Kutaisi, Georgia

In the present paper, using the method of boundary integral equations, we consider quasiconformal mappings of close domains onto a unit circle and establish the estimates allowing one to judge on the order of closeness of various values encountered under the construction of these vales through ε, where ε> 0 is a real parameter characterizing the domains closeness. In particular, through ε is defined the order of closeness for the difference of derivatives of solutions of integral equations composed for the close mappable domains by which we construct the desired mapping functions.

Keywords: *quasiconformal mapping, system of Beltrami equations, integral equations.*

The problems connected with conformal and quasiconformal mappings of close domains are highly actual owing to their wide applications. When solving many important problems of applied character we can frequently meet the functions performing certain quasiconformal mappings corresponding to some elliptic systems prescribed in the mappable domains. It is worthwhile therefore to have the methods allowing one to construct such functions effectively or approximately. When constructing such functions, the knowledge of certain boundary estimates for quasiconformal mappings of close domains is important . The methods making it possible to construct approximately certain mapping functions are suggested in (Vertge’ım 1960) and (Fominyh 1974).

In many problems, it is important to know how a small deformation of a contour of the initial domain affects the form of the mapping function and how vary its configuration both in the domain and on its boundary. Significant results in this direction can be found in (Batyrev 1960, Lavrent'ev 1947, Lavrent'ev, Shabat 1958, Samsoniya, Samkharadze 1999).

Finally, it should be noted that estimates of the difference of boundary values, as well as of their derivatives under conformal mapping of close domains when the main domain and its close ones are star-like with respect to the point $z = 0$, have been considered by the authors in (Zivzivadze, Japaridze 2005, Zivzivadze, Japaridze 2006).

On the complex domain $\mathbb{C}$, $z = x + iy$, we consider a simply connected domain G, $0 \in G$ bounded by a simple, closed, smooth contour Γ with the equation given parametrically:

$$t = t(\tau) = x(\tau) + iy(\tau), \quad 0 \le \tau \le 2\pi, \quad t(0) = t(2\pi). \tag{1}$$

To the parameter growth τ there corresponds to the motion of the point $t = t(\tau)$ under which the interior of Γ remains on the left. The functions $x(\tau)$ and $y(\tau)$ are assumed to be 2π periodic.

Let on the curve Γ there be the function $f(t)$ of the point $t \in \Gamma$. Assuming $t = t(\tau)$, we can consider it as a function of the parameter τ, denoting it again by $f(\tau)$. Since the function $t(\tau)$ is periodic, we consider the function $f(\tau)$ as periodically continued with period 2π to the whole real axis.

We say that f belongs to the space $C_\alpha[0;2\pi]$, $0 < \alpha \le 1$ if on the segment $[0;2\pi]$ it satisfies the Holder condition with exponent α.

If $f(\tau)$ and its derivative $f'_\tau = f'(\tau)$ are continuous on the segment $[0;2\pi]$, then we say that f belongs to the class $C'[0;2\pi]$. If, moreover, $f'_\tau \in C_\alpha[0;2\pi]$, $0 < \alpha \le 1$, we write that $f \in C'_\alpha[0;2\pi]$.

$C'[0;2\pi]$, $C_\alpha[0;2\pi]$ and $C'_\alpha[0;2\pi]$, $0 < \alpha \le 1$, are the Banach type spaces (see I. N. Vekua, 1988, p. 24) whose norms are defined, respectively, as follows:

$$\|f\|_{C'} = \|f\|_C + \|f'\|_{c'}, \quad \|f\|_{C_\alpha} = \|f\|_C + H(f,\Gamma,\alpha), \quad \|f\|_{C'_\alpha} = \|f\|_{C'} + H(f'_t,\Gamma,\alpha)$$

where under $\|f\|_C$ and $H(f, \Gamma, \alpha)$ we mean the following quantities:

$$\|f\|_C = \sup_{\tau\in[0;2\pi]} |f(\tau)|, \quad H(f,\Gamma,\alpha) = \sup_{\substack{\tau_1,\tau_2\in[0;2\pi]\\ \tau_1\neq\tau_2}} \frac{|f(\tau_1) - f(\tau_2)|}{|\tau_1 - \tau_2|^\alpha}.$$

We say that the curve Γ given by equation (1) belongs to the class C'_α if $t \in C'_\alpha[0;2\pi]$. If the function $f(z)$ on the closed set $\overline{G}$ satisfies the H¨older condition with exponent α, $0 < \alpha \leq 1$, then we write $f \in C_\alpha(\overline{G})$.

In the sequel, we will consider particular families of domains, close to the given domains in the definite sense.

Defnition (Samsoniya, Samkharadze 1999). Assume that a simply connected domain G, $0 \in G$, is bounded by a simple closed smooth contour $\Gamma \in C'_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ and on the plane $\mathbb{C}$, we consider another simply connected domain $\tilde{G}$ with the equation of boundary $\tilde{\Gamma}$,

$\tilde{t} = \tilde{t}(\tau) = \tilde{x}(\tau) + i\tilde{y}(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi, \quad \tilde{t}(0) = \tilde{t}(2\pi)$

And $\tilde{\Gamma} \in C'_\alpha$. The domain $\tilde{G}$ we call ε-close $(0 < \varepsilon < 1)$ to the domain G if the conditions

$$|t(\tau) - \tilde{t}(\tau)| \leq \varepsilon, \quad \tau \in [0;2\pi], \quad \|t' - \tilde{t}'\|_{C_\alpha} \leq \varepsilon, \quad 0 < \alpha \leq 1 \qquad (2)$$

are fulfilled.

For any $\varepsilon \in (0;1)$, we surely have an infinite set of domains ε-close to G which we denote by $\Omega(G;\varepsilon)$.

Let G_0 be a simply connected domain of complex domain with boundary $\partial G_0 = \Gamma_0 \in C'_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, such that $G \subset G_0$, and for any $\tilde{G} \in \Omega(G;\varepsilon)$, $\tilde{G} \subset G_0$.

In the plane, consider a system of Beltrami equations in a complex form

$$\omega_{\bar{z}} = q(z)\omega_z \qquad (3)$$

under the assumption that $|q(z)| \leq Q_0 < 1$, $q \in C'_\gamma(\overline{G}_0)$, $0 < \gamma \leq 1$ for $z \in \tilde{G}_0$ and $q(z) = 0$ for $z \in \mathbb{C}/\overline{G}_0$, where

$$\omega_z = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\omega}{\partial x} - i\frac{\partial\omega}{\partial y}\Big), \quad \omega_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\omega}{\partial x} + i\frac{\partial\omega}{\partial y}\Big).$$

Suppose that W is a solution of system (3), the so-called global homeomorphism of the whole complex plane $\mathbb{C}$ of the Beltrami equation constructed by I. N. Vekua's scheme (I. N. Vekua, 1988, Ch. 2) which realizes homeomorphic mapping of the plane onto itself, $W(0) = 0$, $W(\infty) = \infty$, $z^{-1}W(z) \to 1$ for $|z| \to \infty$, and according to (Manjavidze 1967)

$W, W_z, W_{\bar z} \in C_{\gamma_0}(\overline{G}_0)$, where $0 < \gamma_0 < \min\{\alpha,\gamma\}$. (4)

The homeomorphism $W(z)$ is known in literature as the basic homeomorphism of equation (3).

They say that a complex function $\omega = f(z)$ realizes quasiconformal mapping (corresponding to system (3)) of a simply connected domain G onto a unit circle $|\omega| < 1$ if ω homeomorphically maps G onto $|\omega| < 1$ and satisfies condition (3).

Effective methods of constructing quasiconformal mappings of simply– and multiply-connected domains corresponding to the Beltrami equation (3) have been elaborated in (Kveselava, Samsonija 1980).

As it has been mentioned in (Kveselava, Samsonija 1980), the function was constructed which mapped quasiconformally a simply connected domain G $(0 \in G)$ onto a unit circle. The construction of such a function is realized under the assumption that the coefficient of Beltrami's equation belongs to the class $C'_\gamma(\overline{G}_0)$ and has the form (see Kveselava, Samsonija 1980)

$$f(z) = W(z)\exp\{K_\Gamma(\lambda; W, z) + ic\},\quad z \in G, \tag{5}$$

$f(0) = 0$, $f(z_1) = 1$ (z_1 is any point of line Γ), where the real function λ is a solution of the integral equation

$$\lambda[t(\tau)] + \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\lambda[t(\sigma)]}{W[t(\sigma)] - W[t(\tau)]}\,dW[t(\sigma)] = -\ln W[t(\tau)],\quad \sigma \in [0;2\pi \tag{6}$$

and the constant c is calculated from the formula

$$c = -\arg W(z_1) - \frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \lambda[t(\tau)]\,d\big[\ln|W[t(\tau)] - W(z_1)|\big] \tag{7}$$

where argument $W(z_1)$ is a principal value of the argument of the point $W(z_1)$ which belongs to the interval $[0;2\pi)$.

Analogously we construct the function

$$\widetilde{f}(z) = W(z)\exp\{K_{\widetilde{\Gamma}}(\widetilde{\lambda}; W, z) + i\widetilde{c}\},\quad z \in \widetilde{G}, \tag{8}$$

which quasiconformally maps the domain $\tilde{G} \in \Omega(G;\varepsilon)$ onto the unit circle with the fulfilment of the conditions $\widetilde{f}(0) = 0$, $\widetilde{f}(\widetilde{z}_1) = 1$ ($\widetilde{z}_1$ is any point of line $\tilde{\Gamma}$), where the real function $\tilde{\lambda}$ is a unique solution of the Fredholm type integral equation

$$\widetilde{\lambda}[\widetilde{t}(\tau)] + \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}} \frac{\widetilde{\lambda}[\widetilde{t}(\sigma)]}{W[\widetilde{t}(\sigma)] - W[\widetilde{t}(\tau)]}\, dW[\widetilde{t}(\sigma)] = -\ln\big|W[\widetilde{t}(\tau)]\big|,\quad \sigma\in[0;2\pi], \quad (9)$$

where $\widetilde{\Gamma}\in C'_{\alpha}$, and

$$\widetilde{c} = -\arg W(\widetilde{z}_1) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}} \widetilde{\lambda}[\widetilde{t}(\tau)]\, d\big[\ln\big|W[\widetilde{t}(\tau)] - W(\widetilde{z}_1)\big|\big] \quad (10)$$

When establishing different estimates characterizing the closeness of quantities, it becomes necessary to know the estimate for the difference of solutions and their derivatives of integral equations written for the close to each other domains.

On studying conformal mappings of close domains (see Samsoniya, Samkharadze 1999, Zivzivadze, Japaridze 2005 , Zivzivadze, Japaridze 2006) we meet the following integral equations:

$$\varphi[t(\tau)] + \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi[t(\sigma)]}{t(\sigma) - t(\tau)}\, dt(\sigma) = -\ln|t(\tau)|,\quad t\in\Gamma \quad (11)$$

$$\widetilde{\varphi}[\widetilde{t}(\tau)] + \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}} \frac{\widetilde{\varphi}[\widetilde{t}(\sigma)]}{\widetilde{t}(\sigma) - \widetilde{t}(\tau)}\, d\widetilde{t}(\sigma) = -\ln|\widetilde{t}(\tau)|,\quad \widetilde{t}\in\widetilde{\Gamma}, \quad (12)$$

written for the domains G and $\tilde{G}$, respectively, where $\Gamma, \tilde{\Gamma}\in C'_{\alpha}$, while φ and $\tilde{\varphi}$ are the unknown real functions. The above equations whose free terms belong to the class $C'_{\alpha}\left[0;2\pi\right]$ are of Fredholm type (see N. I. Muskhelishvili 1982 pp. 226–231) and have unique solutions. These solutions are used for the construction of mapping functions.

In this paper following theorem is proved:

Theorem 1. *There exists the constant* $a_1(G) = a_1 \in (0;1)$ *such that if the boundaries* Γ *and* $\tilde{\Gamma}$ *of domains* G *and* $\tilde{G}\in\Omega(G;\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \le a_1$ *belong to the class* C'_{α}, *then the estimates*

$\|\varphi -$ [redacted] $(G,\beta)\|\varphi\|_{C_{\alpha-\beta}}\,\varepsilon$, $\|\varphi' -$ [redacted] $(G,\beta)\|\varphi'\|_{C_{\alpha-\beta}}\,\varepsilon$ (13)

hold, where ϕ *and* ϕ *are the unique solutions of integral equations* (11) *and* (12), *and* β *is an arbitrary positive number, less than* α.

Theorem 2. *There exists the number* $a_2(G;W) = a_2 \in (0;1)$ *such that if the domains* G *and* $\tilde{G} \in \Omega(G;\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \le a_2$ *whose boundaries belong to the class* C'_α, ε *are close to each other in a sense of* (2), *then the estimates*

$$\begin{aligned} \|\lambda - \widetilde{\lambda}\|_{C_{\frac{\gamma_0}{2}-\beta}} &\le B_1(G;W,\beta)\|\lambda\|_{C_{\frac{\gamma_0}{2},-\beta}} \cdot \varepsilon^{\frac{\gamma_0}{2}} \\ \|\lambda' - \widetilde{\lambda}'\|_{C_{\frac{\gamma_0}{2}-\beta}} &\le B_1(W;G,\beta)\|\lambda'\|_{C_{\frac{\gamma_0}{2}-\beta}} \cdot \varepsilon^{\frac{\gamma_0}{2}} \end{aligned} \tag{14}$$

are valid, where λ *and* $\tilde{\lambda}$ *are the unique solutions of integral equations* (6) *and* (7), *respectively,* γ_0 *is the constant from* (4), $0 < \gamma_0 < \min\{\alpha,\gamma\}$, *and* β *is any number from* $\left(0;\dfrac{\gamma_0}{2}\right)$.