ანალიზი

ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლის ტანგენციალური ზღვრის შესახებ

გიორგი თეთვაძე
giorgi.tetvadze@atsu.edu.ge
ლილი თეთვაძე
იური თვალოძე
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო

ნაშრომში დადგენლია საკმარისი პირობები იმისა, რომ ბლიაშკე - ჯერბაშიანის კანონიკურ ნამრავლს გააჩნდეს არამხებითი ანუ ტანგენციალური ზღვრები.

საკვანძო სიტყვები: *უსასრულო ნამრავლი, ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლი, კუთხური, რადიალური და ტანგენციალური ზღვრები.*

დასაწყისში შემოვიღოთ ზოგიერთი აღნიშვნა და განმარტება:

$\mathbb{C}$ - კომპლექსურ რიცხვთა ველი.

$\mathbb{D} = \{z: |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ -ერთეულოვანი ღია წრე.

$\mathbb{T} = \{z: |z| = 1, z \in \mathbb{C}\}$- ერთეულოვანი წრეწირი.

$V_\varphi(e^{i\theta}) -$ შტოლცის კუთხე, ე.ი. $e^{i\theta}$ წერტილიდან გამოსული ორი ქორდით შედგენილი $2\varphi - ს$, ტოლი კუთხე $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, რომლისთვისაც $[0; e^{i\theta}]$ რადიუსი ბისექტრისაა.

$\Delta\varphi(e^{i\theta}, z) = \{z: |z - e^{i\theta}| < 1 - \mathrm{r},\ 0 < r < 1, z \in \mathbb{C},\} \cap V\varphi(e^{i\theta}) - e^{i\theta}$ წერტილის სამკუთხა მიდამო.

M სიმრავლის დაგროვების წერტილები აღვნიშნოთ M'-ითმ ხოლო მისი ჩაკეტვა - $\overline{M} = M \cup M'$-ით.

ზღვარს თუ იგი არსებობს, ნებისმიერი φ -სათვის $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta}\\ z\in V_\varphi(e^{i\theta})}} f(x) = \lim_{z \rightrightarrows e^{i\theta}} f(z)$$

ეწოდება f ფუნქციის კუთხური სასაზღვრო მნიშვნელობა $e^{i\theta}$ წერტილში, ხოლო ზღვარს

$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ ეწოდება f ფუნქციის რადიალური ზღვარი.

ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლს (Джербашян, М. …1948, Тетвадзе, Г. ... 2021) აქვს სახე

$$\mathcal{B}_P(z,(a_n)) = z^{\lambda}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)exp\left(\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)^k\right),$$

სადაც $\lambda+1$ და p ნატურალური რიცხვებია $0<|a_n|\le |a_{n+1}|<1, \lim_{n\to\infty}|a_n|=1, |z|<1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^P=+\infty, \sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^{P+1}<+\infty$$

უსასრულო ნამრავლი $\mathcal{B}_P(z,(a_n))$ თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადია ერთეულოვანი ღია წრის შიგნით, რის გამოც იგი წარმოადგენს ანალიზურ ფუნქციას $\mathbb{D}$ -ში, ნულებით

$\underbrace{0,0,\dots 0}_{\lambda}, a_{1,} a_2,\dots a_n,\dots$

თუ მოცემულია $f: D\to\mathbb{C}$ ფუნქცია და თუ არსებობს სასრული ზღვარი, როცა $z\to e^{i\theta}$ ისე,რომ

$$z\in R(m,\theta,\gamma)=\{z: 1-|z|\ge m\left|arg\left(ze^{-i\theta}\right)\right|, z\in D\}$$

სადაც $-\pi<arg\, z\, e^{-i\theta}\le\pi, m$ ნებისმიერი და γ -ფიქსირებული დადებითი რიცხვებია ეწოდება T_γ ტანგენციალური ზღვარი და ასე აღინიშნება

$T_\gamma \lim_{z\to e^{i\theta}} f(z)$.

ცნობილია (Lowater A.I., …, 1957), რომ T_1 არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს კუთხური ზღვარი; მაგრამ როცა $\gamma>1$ კუთხური ზღვრის არსებობიდან არ გამომდინარეობს T_γ ზღვრის არსებობა. არსებობს ბლიაშკეს ნამრავლი რომელსაც არ გააჩნია $T_\gamma(\gamma>1)$ ზღვარი არცერთი $e^{i\theta}$ წერტილში. კარგომ (Cargo G.T., … , 1963) დაამტკიცა, რომ თუ

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-|a_n|}{|\,e^{i\theta}-a_n|^{\gamma}}<+\infty,\quad \gamma\ge 1, \tag{1}$$

მაშინ ბლიაშკეს ნამრავლს $e^{i\theta}$ წერტილში აქვს T_γ -ზღვარი, ხოლო ბლიაშკეს ნამრავლის k რიგის წარმოებულს $T_{\gamma/2k}$ -ზღვარი, როცა $2k<\gamma$.

პროტასმა (Protas D., … , 1971) დაამტკიცა, რომ (1) პირობა საკმარისია იმისათვის, რომ ბლიაშკეს ნამრავლს k რიგის წარმოებულს ქონდეს $e^{i\theta}$ წერტილში $T_{\gamma/(k+1)}$ ზღვარი, როცა $k-1\le\gamma$.

ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ ანალოგიურ საკითხებს ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკური ნამრავლისათვის.

თეორემა 1. ვთქვათ $0<|a_n|\le |a_{n+1}|<1, \lim_{n\to\infty}|a_n|=1, |z|<1,$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^P=+\infty\,,\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^{P+1}<+\infty$$

p - ნატურალური რიცხვია.

თუ რაიმე $\gamma \geq 1$ რიცხვისათვის

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|e^{i\theta}-a_n|^{\gamma}}\right)^{P+1}<+\infty \tag{2}$$

მაშინ ბლიაშკე-ჯერბაშიანის კანონიკურ ნამრავლს $e^{i\theta}$ წერტილში აქვს T_γ ტანგენციალური ზღვარი, ამასთან

$T_\gamma \lim\limits_{z\to e^{i\theta}} \mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n))=\mathcal{B}_{P+1}\left(e^{i\theta},(a_n)\right)\neq 0,+\infty.$

დამტკიცება: რადგან,

$$\frac{1-|a_n|}{|e^{i\theta}-a_n|}=\frac{1-|a_n e^{-i\theta}|}{|1-a_n e^{-i\theta}|},\quad \frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}e^{i\theta}z}=\frac{1-|a_n e^{-i\theta}|^2}{1-\overline{a_n e^{-i\theta}}z},$$

ამიტომ, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\theta=0$, ე.ი. (1)-ი მიიღებს სახეს

აქედან კი ცხადია, $e^{i\theta}=1$. მაშასადამე, ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ თუ

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|1-a_n|^{\gamma}}\right)^{P+1}<+\infty. \tag{3}$$

პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ თუ სრულდება (2), მაშინ აუცილებლად

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|arga_n|^{\gamma}}\right)^{P+1}<+\infty. \tag{4}$$

(3)-ს დასამტკიცებლად ვისარგებლოთ სტანდარტული მეთოდით (Gargo G.T., …. 1962).

დაუშვათ

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|arga_n|^{\gamma}}\right)^{P+1}=+\infty. \tag{5}$$

და ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|1-a_n|^{\gamma}}\right)^{P+1}=+\infty.$$

თუ $K=\left\{z:|z-1|<2^{-\frac{1}{2}}\right\}$, მაშინ მიუხედავად იმისა $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^{p+1}<+\infty$ გვექნება

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|arga_n|^{\gamma}}\right)^{P+1}=+\infty.$$

განვიხილოთ $\frac{\pi}{2}$-ის ტოლი კუთხე წვეროთი $z=1$ წერტილში, რომლისთვისაც $[0,1]$ ბისექტრისაა. თუ ეს კუთხე შეიცავს K -ში მოთავსებული $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ მიმდევრობის უსასრულო რაოდენობას, მაშინ $1-|a_n|>|1-a_n|^{\gamma}\cdot 2^{-\frac{3}{2}}$,

$$\left(\frac{1-|a_n|}{|1-a_n|^{\gamma}}\right)^{p+1}>2^{-\frac{3(p+1)}{2}}$$

და მაშასადამე ასეთი a_n-ისათვის

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|1-\overline{a}_n|^{\gamma}}\right)^{P+1}=+\infty.$$

თუ ამ კუთხის შიგნით მდებარეობს a_n-ის სასრული რაოდენობა, მაშინ $z=1$ წრტილიდან a_n-ზე გამავალ რადიუსზე დაშვებული მართობის სიგრძე აღვნიშნოთ P_n-ით. ცხადია $P_n<|arg\, a_n|$ და $\frac{P_n}{|1-a_n|}>cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, აქედან

$$|1-a_n|<P_n\sqrt{2}<|arg\, a_n|\sqrt{2},$$

$$|1-a_n|^{\lambda(p+1)}<|arg\, a_n|^{\gamma(p+1)}2^{\frac{\gamma(p+1)}{2}},$$

$$\left(\frac{1-|a_n|}{|1-a_n|^{\gamma}}\right)^{p+1}>\left(\frac{1-|a_n|}{|arg\, a_n|^{\gamma}2^{\frac{\gamma}{2}}}\right)^{p+1}.$$

მაშასადამე

$$\sum_{a_n\in K}\left(\frac{1-|a_n|}{|1-a_n|^{\gamma}}\right)^{p+1}=+\infty.$$

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|arg a_n|^{\gamma}}\right)^{P+1}<+\infty. \tag{6}$$

დინის თეორემის ძალით (Knopp K., … , 1947) არსებობს ისეთი $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა $0<\omega_n\le 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n=0$, რომ

$$\sum_{a_n\in K}\frac{1-|a_n|^{p+1}}{\omega_n|arg\, a_n|^{\gamma(p+1)}}<+\infty. \tag{7}$$

ვთქვათ

$$S_n=\left\{z:|z-a_n|<\omega_n|arg\, a_n|^{\gamma(p+1)}\right\}. \tag{8}$$

თუ $z\in\mathbb{D}\setminus\bigcup_{n=n_0}^{+\infty}S_n$, მაშინ

$$\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a}_n z|}\right)^{p+1}\le\left(\frac{(1+|a_n|)(1-|a_n|)}{|1-\overline{a}_n z|}\right)^{p+1}<$$

$$<\left(\frac{2(1-|a_n|)}{|a_n-z|}\right)^{p+1}\cdot\left(\frac{|a_n-z|}{|1-\overline{a}_n z|}\right)^{p+1}\le\frac{2^{p+1}(1-|a_n|)^{p+1}}{|a_n-z|^{p+1}}\le$$

$$\le\frac{2^{p+1}(1-|a_n|^{p+1})}{\omega_n|arg\, a_n|^{\gamma(p+1)}}<q<1. \tag{9}$$

აღვნიშნოთ

$$A_n(z) = \left(1 - \frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right) exp\left(\sum_{k=1}^{P} \frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)^k\right),$$

$$\mathcal{B}_{P+1,1}(z,(a_n)) = z^\lambda \prod_{n=1}^{n_0} A_n(z) \text{ და } \mathcal{B}_{P+1,2}(z,(a_n)) = \prod_{n=n_0+1}^{+\infty} A_n(z).$$

ამ აღნიშვნებიდან მივიღებთ

$$\mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n)) = \mathcal{B}_{P+1,1}(z,(a_n)) \cdot \mathcal{B}_{P+1,2}(z,(a_n)),$$

ამასთან, ცხადია, $\mathcal{B}_{P+1,1}(z,(a_n))$ უწყვეტი ფუნქციაა $\overline{\mathbb{D}}$-ში. ამიტომ, თეორემის დამტკიცებისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$T_\gamma \lim_{z \to 1} \mathcal{B}_{P+1,2}(z,(a_n)) = \mathcal{B}_{P+1,2}(1,(a_n)). \quad (10)$$

ავირჩიოთ ლოგარითმული ფუნქციის მთავარი მნიშვნელობა $\ln\omega = \ln|\omega| + iarg\omega, \quad -\pi < argw \le \pi$, (9)-ს ძალით

$$\ln A_n(z) = \ln\left(1 - \frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right) + \sum_{k=1}^{P} \frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)^k$$

$$= -\sum_{k=P+1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)^{p+1};$$

აქედან

$$B_{p+1,2}(z,(a_n)) = e^{-\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a}_n z}\right)^k}. \quad (11)$$

(9)-ს ძალით როცა $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{n=n_0+1}^{+\infty} S_n$, მივიღებთ

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\sum_{k=P+1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)\right| \le \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\sum_{k=P+1}^{\infty} \frac{1}{p}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|}\right)^k =$$

$$= \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|}\right)^{P+1}}{1-\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|}} < \frac{1}{1-q}\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}|}\right)^{p+1} \le$$

$$< \frac{1}{1-q}\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}|}\right)^{P+1} \le \quad \le \frac{1}{1-q}\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{2^{p+1}(1-|a_n|)^{p+1}}{\omega_n|arg\, a_n|^{\gamma(p+1)}}. \quad (12)$$

(7) და (12) ძალით მწკრივი

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\sum_{k=P+1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)$$

თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადია $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{n=n_0}^{+\infty} S_n$-ზე და $\mathcal{B}_{P+1,2}(z,(a_n))$ და მაშასადამე $\mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n))$ თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადია $\overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{n=n_0}^{+\infty} S_n$ -ზე.

სტატიაში (Cargo G.< … < 1962) დამტკიცებულია ისეთი n_0 - ნატურალური რიცხვის არსებობა, რომ $R(m,0,\gamma)\subset\overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{n=n_0}^{+\infty} S_n$. მაშასადამე $\mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n))$ თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადია $R(m,0,\gamma)$-ზე.

ამასთან $T_\gamma \lim\limits_{z\to 1} \mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n)) = \mathcal{B}_{P+1}(1,(a_n))$.

თეორემა დამტკიცებულია.

ლიტერატურა

Corgo, G.T. 1962: „Angular and tangential limits of Bloshke products and tier successive derivative“, Vanad. I. Math. 14, 1962: 334-348.

Knopp, K. 1947. *Theory and application of analite series*. 2nd English ed.; New York.

Lowater A.J. and Piranian G. 1987. „The boundary behavior of functions analytiv in a disk“. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. J.* 239, 1987.

Protas, D. 1971. „Tangential limits of Blashke Products and Functions of Bounded charatteristic“. *Arch. Math.* 22, #6, 1971: 633-641.

Tetvadze, G. Tetvadze, l. Tsibadze, l. 2021. „On boundary properties of the boundary values of Blishke-Djerbashyan Canonical product“. *Bulletin of the ATSU*, #2(18), 2021.

Джербашян, М. М. 1945. „О каноническом представлении мероморфных в единственном круге функции“. *Армянский ССР 3*, N1, 1945: 3-9.

Analysis

On tangential limit of Bliashke-Djerbashyan Canonical product

Giorgi Tetvadze
giorgi.tetvadze@atsu.edu.ge
Lili Tetvadze
Iuri Tvalodze
Akaki Tsereteli State University
Kutaisi, Georgia

The paper establishes sufficient conditions for Bliashke-Djerbashyan Canonical product, in order to have tangential values.

Keywords: *Infinite product, Canonical product of Blaschke-Djerbashyan, Angular, Radial, and tangential values.*

For the beginning, we have some definitions:

$\mathbb{C}$ - the Field of complex numbers.

$\mathbb{D} = \{z: |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ - Unit open disk.

$\mathbb{T} = \{z : |z| = 1,\ z \in \mathbb{C}\}$ - Unit Circle.

$V_\varphi(e^{i\theta}) -$ Stolz Angle, is an angle equal to $2\varphi, 0 < \varphi < \pi/2$ and is formed by two chords that come out of the point $e^{i\theta}$, radius $[0; e^{i\theta}]$ is bisector, $0 < \varphi < \pi/2$.

$\Delta\varphi(e^{i\theta}, z) = \{z: |z - e^{i\theta}| < 1 - \mathrm{r},\ 0 < r < 1, z \in \mathbb{C},\} \cap V\varphi(e^{i\theta}) -$ triangular neighborhood of the $e^{i\theta}$ point.

By M' denote accumulation points of the set M and by $\overline{M} = M \cup M'$ denote the closure of the set M.

If exists limit for arbitrary $\varphi, 0 < \varphi < \pi/2$

$$\lim_{\substack{z \to e^{i\theta} \\ z \in V_\varphi(e^{i\theta})}} f(x) = \lim_{z \to e^{i\theta}} f(z)$$

is angular boundary value of the function f in $e^{i\theta}$ point, and $\lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$ is radial limit of the function f.

Canonical product of Blaschke-Djerbashyan

$$\mathcal{B}_P(z, (a_n)) = z^\lambda \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a}_n z}\right) exp\left(\sum_{k=1}^{P} \frac{1}{k} \left(\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \overline{a}_n z}\right)^k\right),$$

where $\lambda + 1$ and p natural numbers

$0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| < 1, \lim_{n\to\infty} |a_n| = 1, |z| < 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|)^P = +\infty, \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|)^{P+1} < +\infty$$

Infinite product $\mathcal{B}_P\big(z, (a_n)\big)$ is unifomly and absolutely convergent inside of the open unit disk, and represents analytic function in $\mathbb{D}$ with zeros

$$\underbrace{0, 0, \dots 0}_{\lambda}, a_1, a_2, \dots a_n \dots$$

If exists $f: D \to \mathbb{C}$ function and exist finite limit, when $z \to e^{i\theta}$, so that,

$$z \in R(m, \theta, \gamma) = \{z: 1 - |z| \geq m\big|arg\big(ze^{-i\theta}\big)\big|, z \in D\}$$

where $-\pi < arg\, z\, e^{-i\theta} \leq \pi, m$ is arbitrary and γ is fixed positive number, T_γ is tangential limit and is denoted by

$T_\gamma \lim_{z\to e^{i\theta}} f(z)$.

As it is known, T_1 only exists, when the angular limit exists. But when $\gamma > 1$, existing of angular limit does not mean that T_γ exists. There is Blaschke product, which does not have $T_\gamma (\gamma > 1)$ limit in any $e^{i\theta}$ points. Cargo proced that, if

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - |a_n|}{|\ e^{i\theta} - a_n|^\gamma} < +\infty, \quad \gamma \geq 1, \tag{1}$$

then Blaschke product has T_γ limit in $e^{i\theta}$ point, and k^{th} order derivative of Blaschke product has $T_{\gamma/2k}$ limit, when $2k < \gamma$.

Protas proved that condition (1) is sufficient for k^{th} order derivative of Blaschke product to have $T_{\gamma/2k}$ limit in $e^{i\theta}$pount, when $k - 1 \leq \gamma$.

Theorem 1: Let $0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| < 1, \lim_{n\to\infty} |a_n| = 1, |z| < 1,$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|)^P = +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|)^{P+1} < +\infty$$

p is natural number.

If for any $\gamma \geq 1$ number

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - |a_n|}{|e^{i\theta} - a_n|^\gamma}\right)^{P+1} < +\infty \tag{2}$$

then Blaschke-Djerbashyan canonical product has T_γ tangential limit in the $e^{i\theta}$ point, and

$T_\gamma \lim_{z\to e^{i\theta}} \mathcal{B}_{P+1}\big(z, (a_n)\big) = \mathcal{B}_{P+1}\left(e^{i\theta}, (a_n)\right) \neq 0, +\infty.$

Proof: According to the following

$$\frac{1-|a_n|}{|e^{i\theta}-\ a_n|}=\frac{1-|a_ne^{-i\theta}|}{|1-a_ne^{-i\theta}|},\ \frac{1-|a_n|^2}{1-\ \overline{a_n}e^{i\theta}z}=\frac{1-|a_ne^{-i\theta}|^2}{1-\ \overline{a_ne^{-i\theta}}z},$$

Without loss of generality, we can assume that $\theta=0$.
Obviously, $e^{i\theta}=1$. Therefore, we must prove that if

In order to prove (3) standard technique is used.
Suppose that,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|arga_n|^{\gamma}}\right)^{P+1}=+\infty \tag{5}$$

and we should prove that

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|1-a_n|^{\gamma}}\right)^{P+1}=+\infty.$$

If $K=\left\{z:|z-1|<2^{-\frac{1}{2}}\right\}$, then though $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)^{p+1}<+\infty$ we will have

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|arga_n|^{\gamma}}\right)^{P+1}=+\infty.$$

Consider the angle of measure $\frac{\pi}{2}$ ith ists vertex at $z=1$ point for which [0,1] is the bisect. If this angle cointeins an infenite number of $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ interior in K, then

$1-|a_n|>|1-a_n|^{\gamma}\cdot 2^{-\frac{3}{2}}$,

$$\left(\frac{1-|a_n|}{|1-a_n|^{\gamma}}\right)^{p+1}>2^{-\frac{3(p+1)}{2}}$$

And therefore, for such a_n

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{|1-\overline{a_n}|^{\gamma}}\right)^{P+1}=+\infty.$$

If only a finite number of a_n in K are is the angle, let the P_n be the perpendicular distance from $z=1$ to the radious through a_n. Therefore, $|arg\,a_n|$ and $\frac{P_n}{|1-a_n|}>cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, so

$$|1-a_n|<P_n\sqrt{2}<|arg\,a_n|\sqrt{2},$$

$$|1-a_n|^{\lambda(p+1)}<|arg\,a_n|^{\gamma(p+1)}2^{\frac{\gamma(p+1)}{2}},$$

$$\left(\frac{1-|a_n|}{|1-a_n|^{\gamma}}\right)^{p+1}>\left(\frac{1-|a_n|}{|arg\,a_n|^{\gamma}2^{\frac{\gamma}{2}}}\right)^{p+1}.$$

Finally,

$$\sum_{a_n \in K} \left(\frac{1-|a_n|}{|1-a_n|^{\gamma}} \right)^{p+1} = +\infty.$$

The contradiction proves that

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-|a_n|}{|arga_n|^{\gamma}} \right)^{P+1} < +\infty. \tag{6}$$

According to the Dini theorem exists $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ sequence $0 < \omega_n \le 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$, such that

$$\sum_{a_n \in K} \frac{1-|a_n|^{p+1}}{\omega_n |arg\, a_n|^{\gamma(p+1)}} < +\infty. \tag{7}$$

Suppose,

$$S_n = \{z \colon |z-a_n| < \omega_n |arg\, a_n|^{\gamma(p+1)}\}. \tag{8}$$

If $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \bigcup_{n=n_0}^{+\infty} S_n$, then

$$\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a}_n z|} \right)^{p+1} \le \left(\frac{(1+|a_n|)(1-|a_n|)}{|1-\overline{a}_n z|} \right)^{p+1} <$$

$$< \left(\frac{2(1-|a_n|)}{|a_n - z|} \right)^{p+1} \cdot \left(\frac{|a_n - z|}{|1-\overline{a}_n z|} \right)^{p+1} \le \frac{2^{p+1}(1-|a_n|)^{p+1}}{|a_n - z|^{p+1}} \le$$

$$\le \frac{2^{p+1}(1-|a_n|^{p+1})}{\omega_n |arg\, a_n|^{\gamma(p+1)}} < q < 1. \tag{9}$$

Denote,

$$A_n(z) = \left(1 - \frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a}_n z}\right) exp\left(\sum_{k=1}^{P} \frac{1}{k} \left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\ \overline{a}_n z} \right)^k \right),$$

$$\mathcal{B}_{P+1,1}(z,(a_n)) = z^{\lambda} \prod_{n=1}^{n_0} A_n(z) \text{ და } \mathcal{B}_{P+1,2}(z,(a_n)) = \prod_{n=n_0+1}^{+\infty} A_n(z).$$

According to the denotions

$$\mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n)) = \mathcal{B}_{P+1,1}(z,(\,a_n)) \cdot \mathcal{B}_{P+1,2}(z,(a_n)),$$

Therefore, $\mathcal{B}_{P+1,1}(z,(a_n))$ is a continous function in $\overline{\mathbb{D}}$. So, in order to prove the theorem, showing that

$$T_{\gamma} \lim_{z \hat{\to} 1} \mathcal{B}_{P+1,2}(z,(a_n)) = \mathcal{B}_{P+1,2}(1,(a_n)) \tag{10}$$

Is suficient.

Let us choose the main meaning of the logaritmic function $\ln \omega = \ln|\omega| + iarg\omega$, $-\pi < argw \le \pi$, because of (9)

$$\ln A_n(z) = \ln\left(1 - \frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a}_n z}\right) + \sum_{k=1}^{P} \frac{1}{k} \left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\ \overline{a}_n z} \right)^k$$

$$= -\sum_{k=P+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\ \overline{a}_n z} \right)^{p+1};$$

According to this

$$B_{p+1,2}(z,(a_n)) = e^{-\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a}_n z}\right)^k}. \qquad (11)$$

Because of (9) when $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{n=n_0+1}^{+\infty} S_n$, we have

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\sum_{k=P+1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)\right| \le \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\sum_{k=P+1}^{\infty}\frac{1}{p}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|}\right)^k =$$

$$= \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|}\right)^{P+1}}{1-\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|}} < \frac{1}{1-q}\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}|}\right)^{p+1} \le$$

$$< \frac{1}{1-q}\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\left(\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}|}\right)^{P+1} \le \quad \le \frac{1}{1-q}\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{2^{p+1}(1-|a_n|)^{p+1}}{\omega_n|arg\, a_n|^{\gamma(p+1)}}. \qquad (12)$$

According to (7) and (12) following sequence

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\sum_{k=P+1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a_n}z}\right)$$

is uniformly and absolutely convergent in $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{n=n_0}^{+\infty} S_n$ and $\mathcal{B}_{P+1,2}(z,(a_n))$, and therefore $\mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n))$ is uniformly and absolutely convergent in $\overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{n=n_0}^{+\infty} S_n$.

In the article (Cargo G.< … < 1962) is proven the existence of such natural number n_0 that $R(m,0,\gamma) \subset \overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{n=n_0}^{+\infty} S_n$. Therefore $\mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n))$ is uniformly and absolutely convergent in $R(m,0,\gamma)$. Additionally,
$T_\gamma \lim_{z\to 1} \mathcal{B}_{P+1}(z,(a_n)) = \mathcal{B}_{P+1}(1,(a_n))$.

The theorem is proved.